2011年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　E

数　　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙(その1)を使用すること**.

(1) 2次方程式 $x^2-2mx+(m+2)=0$ の2つの解を α, β とする.

1. $\alpha>\beta>1$ となるのは $\boxed{\text{ア}}<m<\boxed{\text{イ}}$ の場合である.
2. $\alpha>1>\beta$ となるのは $m>\boxed{\text{ウ}}$ の場合である.

(2) $2^{x-1}+2^{-x}=t$ のとき, $2^{2x-2}+2^{-2x}$ は, t を用いて表すと,

$$f(t)=at^2+bt+c \qquad (t\geqq d)$$

となる. ここで $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウエ}}$, $d=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である.
$f(t)$ は, $t=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる.

(3) $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする.

1. $\dfrac{n}{100}<\log_{10}5<\dfrac{n+1}{100}$ をみたす自然数 $n=\boxed{\text{アイ}}$ である.
2. 15^{10} の桁数は $\boxed{\text{ウエ}}$ である.
3. $\left(\dfrac{1}{18}\right)^{10}$ は, 小数第 $\boxed{\text{オカ}}$ 位に初めて0でない数字が現れる.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 実数 $s, t\ (s > 0)$ に対して，記号を $F_{s,t} = s^t + s^{-t}$, $G_{s,t} = s^t - s^{-t}$ と定める.

1. $F_{2,t} = 3$ のとき $F_{4,t} = \boxed{ア}$ ，$F_{8,t} = \boxed{イウ}$ である.
2. $G_{2,t} = 2$ のとき $F_{2,t} = \boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ ，$G_{4,t} = \boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である.
3. $F_{s,1} = 3$ のとき $F_{s,3} = \boxed{クケ}$ ，$F_{s,6} = \boxed{コサシ}$ である.

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = k(x + 2)$ は相異なる２つの共有点 A，B をもつ．線分 AB の中点を M とする.

1. k のとりうる値の範囲は $-\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}} < k < \dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である.
2. M の座標を (x, y) とすると，x の範囲は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}} < x \leqq \boxed{ク}$ である.

   また y の範囲は $-\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}} < y < \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ である.

(3) 関数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ において，点 $(2, -2)$ を通る接線は，

傾きが正の方程式が

$$y = \boxed{ア}\,x - \boxed{イウ}$$ ，このときの接点は ($\boxed{エ}$, $\boxed{オカ}$),

傾きが負の方程式が

$$y = -\boxed{キ}\,x + \boxed{ク}$$ ，このときの接点は ($\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$)

である．この２つの接線のなす鋭角を θ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙(その１)を使用すること**.

(1) 直線 $4x - 3y = 4$ と x 軸 に接して，点 $(4, 1)$ を通る円のうち，半径が最小となる円の方程式は

$$(x - \boxed{ア})^2 + (y - \boxed{イ})^2 = \boxed{ウ}$$

である．

(2) 3 本の直線 $x = 0$，$y = 0$ および $x + 2y = 8$ で囲まれた 3 角形の周上において，

$$z = \sin\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi y}{4} + \cos\frac{\pi(x + 2y)}{8}$$

の最大値と最小値を考える．

1. z は $(x, y) = \left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$ において最大値 $\sqrt{\boxed{ウ}}$ をとる．
2. z は $(x, y) = \left(\boxed{エ}, \boxed{オ}\right)$ において最小値 $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ をとる．

(3) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + n$ によって囲まれる領域を D_n とする．ただし，n は正の整数，D_n は境界を含むものとする．

1. 領域 D_n の点 (x, y) のうち，x，y がともに整数となる点の個数を a_n と表したとき，$a_1 = \boxed{ア}$，$a_2 = \boxed{イ}$ である．
2. n を 1 から順に大きくしていくとき，放物線と直線の 2 つの交点の x 座標，y 座標が，すべて整数となるような n は，値が小さい順に $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オカ}$，$\cdots$ である．
3. 有限数列 $a_{20}, a_{21}, \cdots, a_m$ は，初項 a_{20} が $\boxed{キクケ}$，公差が $\boxed{コサ}$ の等差数列となる．このとき m の最大値は $\boxed{シス}$ である．

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙(その2)** を使用すること.

図のような経路のある器具の A に球を入れると，その球は各分岐で確率 p で右の経路，確率 q で左の経路に進み，最後に $B_0 \sim B_8$ のいずれかに到達する．たとえばすべての分岐で右に進むとき，最後の到達点は B_8 である．

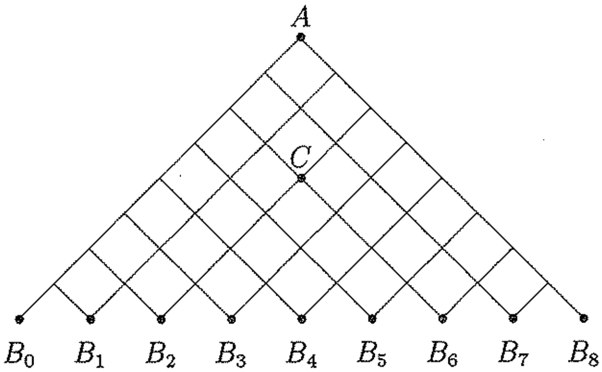
(1) A から B_4 に進む経路の数を求めよ．

(2) 分岐点 C を通る確率 P_c を求めよ．

(3) B_m $(m = 0, \cdots, 8)$ に到達する確率 $P(m)$ を求めよ．

(4) $P(m+1)/P(m) > 1$ となる条件を求め，特に $p = 3/4, q = 1/4$ の場合，$P(m)$ を最大にする m の値を求めよ．

(5) 球が C を2回通るまで入れ続けて，ちょうど n 回目で終了する確率を $Q(n)$ とする．$p = 1/2, q = 1/2$ のとき $Q(n)$ を最大にする n を求めよ．



（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

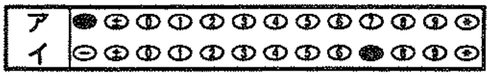
1. 解答用紙(その１)はマーク・シートになっている．ＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること．
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること．
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと．

問題の $\boxed{\text{アイ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ などの $\boxed{\quad}$ には，ある整数が入る．これらを次の方法で解答欄に解答せよ．

(1) ア，イ，ウ，…のひとつひとつは，それぞれ０から９までの数字，または，－，±，＊のいずれかひとつに対応する．それらをア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークする．

マークは，◯を塗りつぶすことによっておこなう．訂正するときは，消しゴムで完全に消すこと．✕をつけても，消したことにならない．

〔例〕 $\boxed{\text{アイ}}$ に－７と答えたいとき



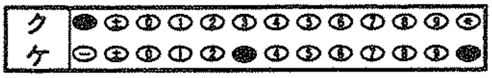
〔例〕 $\boxed{\text{ウエ}}$ に 38 と答えたいとき

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{オカキ}}$ に４と答えたいとき

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊を付加する(この場合，最後の欄には２つのマークが入ることになる)．

〔例〕 $\boxed{\text{クケ}}$ に－365 と答えたいとき



(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{コサ}}$ に対して問題が

$x^2+1<0$ ならば $x \geqq \boxed{\text{コサ}}$

のとき

(5) 以上により，どの欄にもかならずマークが入ることになる．記入のない欄は，解答放棄とみなされる．

(6) 分数形で解答するときは既約分数とし，符号は分子につけること．

(7) 平方根はできるだけ開く．〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする．