2020年度 $\mathbb{E}_A$・$\mathbb{E}_B$

# 数　　学

注　意

1. 問題は全部で８ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その１はマーク・シート，その２は記述式)は両方とも必ず提出のこと．この問題冊子は提出する必要はない.

**マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと.**

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙(その1)を使用すること**.

(1) $\log_3\left\{\left(\dfrac{0.25}{1-0.25}\right)^{1-0.25}+\left(\dfrac{1-0.25}{0.25}\right)^{0.25}\right\}$ の値は，$2\log_3 \boxed{1} - 0.75$ である.

(2) 3 次方程式

$$x^3-3x^2+x+2=0$$

の 3 つの解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とする.

1. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\boxed{2}$
2. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\boxed{3\,\vdots\,4}$
3. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\boxed{5}$

(3) 関数 $y=x^2-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$ のグラフ上に $x$ 座標が 1 である点 A をとり，点 A における接線を $\ell_1$ とする. 点 A を通り $\ell_1$ に垂直な直線を $\ell_2$ とすると，$\ell_2$ は関数 $y=x^2-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$ と，点 A および点 $\left(\boxed{6\,\vdots\,7},\ \boxed{8}+\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}\right)$ で交わる.

(4) $\triangle$OAB において $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は $\boxed{11\,\vdots\,12\,\vdots\,13}^\circ$ であり，$\triangle$OAB の面積は $\boxed{14}\sqrt{\boxed{15}}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 7 で割ると 5 余り，13 で割ると 8 余るような自然数のうち，3 桁のものは $\boxed{16\,\vdots\,17}$ 個ある．その中で最大のものは $\boxed{18\,\vdots\,19\,\vdots\,20}$，最小のものは $\boxed{21\,\vdots\,22\,\vdots\,23}$ である．

(2) $\log_7 N = \displaystyle\sum_{k=1}^{2020} \log_7 k$ を満たす自然数 $N$ は，末尾に 0 が連続して $\boxed{24\,\vdots\,25\,\vdots\,26}$ 個並ぶ．

(3) 条件 $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{27}^{\,n} - \frac{\boxed{28}^{\,n}}{\boxed{29}} + \frac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$$

である．

(4) 数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められる．

[1] $0 \leqq a_1 \leqq 1$

[2] $0 \leqq a_n < \dfrac{1}{2}$ のとき $a_{n+1} = 2a_n$，$\dfrac{1}{2} \leqq a_n \leqq 1$ のとき $a_{n+1} = 2 - 2a_n$

1. $a_1 = \dfrac{7}{12}$ のとき $a_{30} = \dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}}$

2. $a_1 = \dfrac{1}{7}$ のとき $a_{30} = \dfrac{\boxed{34}}{\boxed{35}}$

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 3 個のさいころを同時に投げたとき，少なくとも 2 つは同じ目が出る確率は，$\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}}$ である.

(2) 12 個のさいころを同時に投げたとき，1 の目が出る個数を $X$ とする.

1. このとき，$\dfrac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = \dfrac{-n+\boxed{38\,\vdots\,39}}{5n+\boxed{40}}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots,\ 11)$ である.
2. $P(X=n)$ は $n$ の値が $\boxed{41}$ のとき，最大となる.

(3) 2 つの事象 $A, B$ について，$P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$, $P_A(B)=0.3$ とする．このとき，$P(A\cap B)=0.\boxed{42\,\vdots\,43}$, $P_B(A)=0.\boxed{44\,\vdots\,45}$, $P(A\cup B)=0.\boxed{46\,\vdots\,47}$ である.

(4) 1 から 5 までの数字を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある．この中から同時に 2 枚のカードを取り出すとき，取り出したカードの書かれている数字の大きい方から小さい方を引いた値を $X$ とする．このとき，$E(2X+3)=\boxed{48}$, $E(5X^2+3)=\boxed{49\,\vdots\,50}$, $V(3X+1)=\boxed{51}$ となる.

(5) ある商店で販売している商品 1 個の仕入れ価格は 500 円である.

販売価格を 1 個 800 円とすると，1 日の販売個数は 400 個である．また，販売価格の 1 円の値上げに対し，1 日の販売個数は 1 個の割合で減少し，1 円の値下げに対し，1 個の割合で増加する.

このとき，利益を最大にする販売価格は $\boxed{52\,\vdots\,53\,\vdots\,54}$ 円で，1 日の販売個数は $\boxed{55\,\vdots\,56\,\vdots\,57}$ 個である.

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その2) を使用すること**.

$\triangle$ABC において，頂点 A から辺 BC またはその延長に下ろした垂線の長さを $h_A$, 頂点 B から辺 CA またはその延長に下ろした垂線の長さを $h_B$, 頂点 C から辺 AB またはその延長に下ろした垂線の長さを $h_C$ とする．また，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ $a$, $b$, $c$, $\triangle$ABC の内接円の半径を $r$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC の面積を $S$ とする．$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ を示せ．

(2) 任意の正の実数 $x, y, z$ について $3\sqrt[3]{xyz} \leqq x+y+z$ が成り立つことを利用して

$$\frac{3}{\left(\dfrac{1}{h_A}+\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_c}\right)} \leqq \sqrt[3]{h_A h_B h_C}$$

を示せ．

(3) $27r^3 \leqq h_A h_B h_C$ を示せ．

（計算余白）

## マーク・シート記入上の注意

(1) 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2\,\vdots\,3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(０～９)，文字(ａ，ｂ，ｃ，ｄ)，または記号(＊)が入る．１，２，３，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の１，２，３，… で示された解答欄にマークして答えよ．

**例** $\boxed{11\,\vdots\,12\,\vdots\,13}$ に $-83$ と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | ● | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ＊ |
| 12 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ● | 9 | a | b | c | d | ＊ |
| 13 | － | 0 | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ＊ |

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らせる)に＊をマークする．

**例** $\boxed{14\,\vdots\,15}$ に４と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | ● | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ＊ |
| 15 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ● |

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊をマークする．

**例** $\boxed{16\,\vdots\,17}$ に 345 と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | － | 0 | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ＊ |
| 17 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ● |

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

**例** $\boxed{18\,\vdots\,19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geqq \boxed{18\,\vdots\,19}$$

のとき

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ● |
| 19 | － | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | a | b | c | d | ● |

(5) 分数形で解答するときは，既約分数として符号は分子につける．

(6) 根号あるいは対数を含む形で解答するときは，根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える．[**例**] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$，$3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする．

(7) 分数形で根号を含む形で解答するときは，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく，$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する．