2019年度 E

数　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その1はマーク・シート，その2は記述式)は両方とも必ず提出のこと．この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\mathrm{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$x + \dfrac{1}{x}$ の値は $\boxed{1}$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ の値は $\boxed{2}$, $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ の値は $\boxed{3 \vdots 4}$ である.

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 2\sqrt{3}$ のとき，$\cos\theta$ の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{6}}$ である.

(3) 実数を係数とする整式 $P(x) = -x^4 + 5x^3 - \boxed{7 \vdots 8}\,x^2 + \boxed{9 \vdots 10}\,x - \boxed{11}$ は，$P(-1) = -30$ を満たす．$P(x) = 0$ の解をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ として，$\theta_1 = 1 + i$ および $\theta_3 < \theta_4$ であるとき，$\theta_2 = \boxed{12} - i$, $\theta_3 = \boxed{13}$, $\theta_4 = \boxed{14}$ である.

(4) 関数 $f(x) = x^4 - 2x^3 - \boxed{15 \vdots 16}\,x^2 - \boxed{17 \vdots 18}\,x - \boxed{19 \vdots 20}$ の最小値は -250 である．さらに $f(x)$ は合計 3 つの極値をとり，そのうち 2 つは $x = -1$ または $x = -\dfrac{3}{2}$ で極値をとる．$f(x) = 0$ の異なる 3 つの解を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ としたとき，$\omega_1 = \boxed{21} - \sqrt{\boxed{22 \vdots 23}}$, $\omega_2 = \boxed{24 \vdots 25}$, $\omega_3 = \boxed{26} + \sqrt{\boxed{27 \vdots 28}}$ である．ただし $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ とする.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) 次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

1. 18^{30} は $\boxed{29 \mid 30}$ 桁の整数である．

2. 18^{30} の最高位の数字は $\boxed{31}$ である．

(2) 正三角形 ABC において，辺 BC，CA の中点をそれぞれ D，E とし，AD と BE の交点を F，線分 AF の中点を G，CG と BE の交点を H とする．AB $= 1$ のとき，次の四角形の面積を求めよ．

1. 四角形 AGHE $\dfrac{\sqrt{\boxed{32}}}{\boxed{33 \mid 34}}$

2. 四角形 FDCH $\dfrac{\boxed{35}\sqrt{\boxed{36}}}{\boxed{37 \mid 38}}$

(3) 正の実数の等比数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 4,$$
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_5} = 9$$

となるとき，積 $a_1 a_2 \cdots a_5$ の値は $\dfrac{\boxed{39 \mid 40}}{\boxed{41 \mid 42 \mid 43}}$ である．

(4) $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x}{a} - 1\right| dx \leqq \frac{4}{5}$ を満たす a の範囲は $\dfrac{\boxed{44} - \sqrt{\boxed{45 \mid 46}}}{\boxed{47 \mid 48}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}$ である．

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙(その1)を使用すること**.

(1) さいころを3回投げたときの，それぞれの目を x, y, z とする.

1. xyz が偶数となる確率は, $\dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}$ である.

2. $x+y+z$ が偶数となる確率は, $\dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}}$ である.

(2) A君は，友人のB君とC君と試合をすることになった．B君とC君はケーキを持っていて，自分たちと3回試合をして2連勝した時点でケーキをあげるという．A君の対戦順序には2つの選択肢があり,「B君－C君－B君」，または「C君－B君－C君」の順である．A君がB君に勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$，C君に勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ とし，次の場合の確率を求めよ.

1. 「B君－C君－B君」の順で対戦するとき，A君がケーキをもらえる確率は $\dfrac{\boxed{55}}{\boxed{56\,\vdots\,57}}$ である.

2. A君は，C君の方が勝ちやすいと考えて，C君とより多く対戦する「C君－B君－C君」の順が有利だと考えた.「C君－B君－C君」の順で対戦するとき，A君がケーキをもらえる確率は $\dfrac{\boxed{58}}{\boxed{59}}$ である.

(3) ある工場で生産された製品の中から100個を無作為に選んで調べたところ，重さの平均が30gであった．母標準偏差を5gとして，この工場の全製品の重さの平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\boxed{60\,\vdots\,61}.\boxed{62} \leqq m \leqq \boxed{63\,\vdots\,64}.\boxed{65}$$

である．ただし，小数第2位を四捨五入して，小数第1位まで求めよ.

(4) 二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ $(0 \leqq r \leqq n)$ に関する次の問いに答えよ.

1. $\dfrac{{}_{16}\mathrm{C}_0 + {}_{16}\mathrm{C}_1 + {}_{16}\mathrm{C}_2 + {}_{16}\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_{16}\mathrm{C}_{16}}{1024} = \boxed{66\,\vdots\,67}$ となる.

2. $\dfrac{2\,{}_{43}\mathrm{C}_1 + 4\,{}_{43}\mathrm{C}_2 + 6\,{}_{43}\mathrm{C}_3 + 8\,{}_{43}\mathrm{C}_4 + \cdots + 86\,{}_{43}\mathrm{C}_{43}}{{}_{43}\mathrm{C}_1 + {}_{43}\mathrm{C}_3 + {}_{43}\mathrm{C}_5 + {}_{43}\mathrm{C}_7 + \cdots + {}_{43}\mathrm{C}_{43}} = \boxed{68\,\vdots\,69}$ となる.

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その２) を使用すること**.

n 個の正の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のうち，正の実数 a より大きいものが全部で q 個 $(0 \leqq q \leqq n)$ 存在するとする.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right\}$$

とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n} = s^2 + \bar{x}^2$ が成り立つことを示せ.

(2) $\dfrac{q}{n} < \dfrac{\bar{x}}{a}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\dfrac{q}{n} < \dfrac{s^2 + \bar{x}^2}{a^2}$ が成り立つことを示せ.

（計算余白）

5

マーク・シート記入上の注意

(1)　問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2 \mid 3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(−)，数字(0〜9)，文字(a，b，c，d)，または記号(＊)が入る．1，2，3，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の1，2，3，…で示された解答欄にマークして答えよ．

例　$\boxed{11 \mid 12 \mid 13}$ に −83 と答えたいとき

11	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
12	−	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d	＊
13	−	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊

(2)　解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らせる)に＊をマークする．

例　$\boxed{14 \mid 15}$ に 4 と答えたいとき

14	−	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
15	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(3)　解答欄が不足するときは，最後の欄に＊をマークする．

例　$\boxed{16 \mid 17}$ に 345 と答えたいとき

16	−	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
17	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(4)　解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

例　$\boxed{18 \mid 19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geqq \boxed{18 \mid 19}$$

のとき

18	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●
19	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(5)　分数形で解答するときは，既約分数として符号は分子につける．

(6)　根号あるいは対数を含む形で解答するときは，根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える．[例] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$，$3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする．

(7)　分数形で根号を含む形で解答するときは，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく，$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する．