数　　学

注　意

1. 問題は全部で８ページである．
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること．（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている．）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること．
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない．
5. 解答用紙(その１はマーク・シート，その２は記述式)は両方とも必ず提出のこと．この問題冊子は提出する必要はない．

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと．

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること.**

(1) 方程式 $4x+3y=65$ を満たす自然数の組 (x, y) は $\boxed{1}$ 組あり，そのうち x の値が 2 番目に小さい組は $(\boxed{2}, \boxed{3\,4})$，3 番目に小さい組は $(\boxed{5}, \boxed{6\,7})$ である.

(2) $S=1+4x+7x^2+\cdots+(1+3k)x^k+\cdots+28x^9$ は，$x=\boxed{8}$ のとき，$S=\boxed{9\,10\,11}$ であり，$x \neq \boxed{8}$ のとき，$S=\dfrac{\boxed{12\,13}x^{11}-\boxed{14\,15}x^{10}+\boxed{16}x+\boxed{17}}{(x-\boxed{18})^2}$ である.

(3) 次の式

$$(\sqrt{2}+i)^4+(\sqrt{2}-i)^4$$

を計算すると $\boxed{19\,20\,21}$ である.

(4) 次の等式

$$\int_x^a f(t)dt = x^2-5x+6$$

を満たす関数 $f(x)$ は，$f(x)=\boxed{22\,23}x+\boxed{24}$，また定数 a は，小さい順に $\boxed{25}$ と $\boxed{26}$ である.

(5) 3 次方程式 $x^3+ax^2+7x+b=0$ が解 $1-2i$ をもつとき，係数 $a=\boxed{27\,28}$，$b=\boxed{29\,30}$，また他の解は $\boxed{31}$ および $\boxed{32}+\boxed{33}i$ である. ただし a，b は実数とする.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) 連立不等式

$$\begin{cases} |x-1| \leqq 4 \\ (2y+x^2-4x+2)(2y+x+2) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域の面積は，$\dfrac{\boxed{34}\boxed{35}\boxed{36}}{\boxed{37}}$ である.

(2) x, y が実数で $(x+1)^2+(y-1)^2-1 \leqq 0$ であるとき，$\dfrac{x+y+2}{x-y+4}$ の最大値は $\boxed{38}+\sqrt{\boxed{39}}$ である.

(3) a を定数とする．x についての方程式

$$\cos^2 x + \sin x - a - 1 = 0$$

の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数は，$a < \boxed{40}\boxed{41}$ のとき $\boxed{42}$，$a = \boxed{40}\boxed{41}$ のとき $\boxed{43}$，$\boxed{40}\boxed{41} < a < \boxed{44}$ のとき $\boxed{45}$，$a = \boxed{44}$ のとき $\boxed{46}$，$\boxed{44} < a < \dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}}$ のとき $\boxed{49}$，$a = \dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}}$ のとき $\boxed{50}$，$\dfrac{\boxed{47}}{\boxed{48}} < a$ のとき $\boxed{51}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) A，B の 2 人が次のゲームを行う．最初に A は 10 枚，B は 20 枚の硬貨を持っている．1 個のさいころを投げて偶数が出たら A が B に硬貨を 1 枚渡し，奇数が出たら B が A に硬貨を 1 枚渡す．

1. このゲームを 10 回行ったのちも，A が 10 枚，B が 20 枚の硬貨を持っている確率は $\dfrac{\boxed{52}\boxed{53}}{\boxed{54}\boxed{55}\boxed{56}}$ である．
2. このゲームを 4 回行ったとき，4 回のゲーム終了時に初めて A が 10 枚，B が 20 枚の硬貨を持つ状態に戻る確率は $\dfrac{\boxed{57}}{\boxed{58}}$ である．
3. このゲームをどちらかの手持ちの硬貨がなくなるまで続けるとき，A の硬貨がなくなる確率は $\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{60}}$ である．

(2) 1 から n までの数を 1 つずつ書いた札が n 枚ある．これを母集団とし，札に書かれた数字をこの母集団の変量とする．

1. この母集団の母平均は $\dfrac{\boxed{61}+n}{\boxed{62}}$ である．
2. この母集団の母分散は $\dfrac{\boxed{63}\boxed{64}+n^2}{\boxed{65}\boxed{66}}$ である．

(3) ある地方都市で，100 人を無作為に選んで調べたところ，市長の支持者は 90 人であった．この都市における市長の支持率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$0.\boxed{67}\boxed{68} \leqq p \leqq 0.\boxed{69}\boxed{70}$$

である．ただし，小数第 3 位を四捨五入して，小数第 2 位まで求めよ．

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その２) を使用すること.**

1からnまでの自然数について，自然数k $(1 \leqq k \leqq n)$に自然数m $(1 \leqq m \leqq n)$を対応させる関数$m = f(k)$があって，

$$k_1 \leqq k_2 \text{であるとき} \ f(k_1) \leqq f(k_2)$$

という性質を満たす．このとき，

「$f(m) = m$となる自然数m $(1 \leqq m \leqq n)$が存在する」

ことを背理法を利用して証明しよう．

「$f(m) = m$となる自然数m $(1 \leqq m \leqq n)$が存在しない」　①

と仮定し，以下の手順で証明せよ．

(1) ①の仮定のもとで，$f(1) \geqq 2$となることを示せ．

(2) ①の仮定のもとで，$k \geqq 1$に対して$f(k) \geqq k+1$となることを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) 以上を踏まえて，「$f(m) = m$となる自然数m $(1 \leqq m \leqq n)$が存在する」ことを背理法で証明せよ．

（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

(1) 問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2\,|\,3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(0～9)，文字(a，b，c，d)，または記号(*)が入る．1，2，3，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の 1，2，3，… で示された解答欄にマークして答えよ．

例　$\boxed{11\,|\,12\,|\,13}$ に －83 と答えたいとき

11	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
12	－	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d	*
13	－	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らせる)に*をマークする．

例　$\boxed{14\,|\,15}$ に 4 と答えたいとき

14	－	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
15	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に*をマークする．

例　$\boxed{16\,|\,17}$ に 345 と答えたいとき

16	－	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	*
17	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に*をマークする．

例　$\boxed{18\,|\,19}$ に対して問題が

$$x^2+1<0 \text{ ならば } x \geqq \boxed{18\,|\,19}$$

のとき

18	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●
19	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(5) 分数形で解答するときは，既約分数として符号は分子につける．

(6) 根号あるいは対数を含む形で解答するときは，根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える．[例] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$，$3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする．

(7) 分数形で根号を含む形で解答するときは，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく，$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する．