2013年度 E

数　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙は必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 平らな土地で地点Aに立つ塔の高さを測るため，二つの地点B, Cから角度を測定したところ，$\angle ABC = 75°$，$\angle ACB = 45°$ であり，地点Bから塔の先端を見上げる角度は，$60°$ であった.

B, C間の距離が $317\sqrt{2}$ m （約448.3 m）とすると，塔の高さは $\boxed{\text{アイウ}}$ mである.

(2) 関数 $f(x) = 2\cos 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$ は，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で，x の値の小さい方から，$x = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ および $x = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ において最大値 $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ をとる．また，$x = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ において最小値 $\boxed{\text{コサ}}$ をとる.

(3) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ に対して $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{4}{3}$ となるとき,

$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$,　$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$,　$\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である.

(4) $0 \leqq t \leqq \pi$ と正の定数 R に対して $f(t) = 3\sin 2t + R(\sin t + \cos t) + 1$ とする.

1. $x = \sin t + \cos t$ とおいて，x を用いて $f(t) = g(x) = ax^2 + bRx + c$ と表すとき，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$，$c = \boxed{\text{ウエ}}$ となる.
2. x の取り得る値の範囲は $\boxed{\text{オカ}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である.
3. $f(t)$ の最大値は $\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,R$ である.
4. $f(t)$ の最小値は，$0 < R < \boxed{\text{コ}}$ のとき $-\dfrac{R^2}{\boxed{\text{サシ}}} - \boxed{\text{ス}}$，$R > \boxed{\text{コ}}$ のとき $\boxed{\text{セ}} - R$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 3 個の数字を取りだして，百の位は 0 とはならないように 3 桁の数を作る．このとき，2 の倍数は $\boxed{\text{アイ}}$ 個，5 の倍数は $\boxed{\text{ウエ}}$ 個，3 の倍数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個できる．

(2) 1 から 8 までの番号がついた 8 枚のカードを 3 枚，3 枚，2 枚の 3 つの組に分けるとき，異なる分け方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある．また，1 番と 2 番のカードを同じ組に入れて 3 枚，3 枚，2 枚の 3 つの組に分ける場合には，異なる分け方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある．

(3) ある箱の中に白い球が m 個，青い球が n 個入っている．箱から元に戻さずに球を取り出す実験を考える．

1. $m = 20$, $n = 10$ とする．最初に取り出した球が白となる事象の確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，3 番目に取り出した球が青となる事象の確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

2. $m = 4, n = 6$ とする．1 個目が白だったとき，2 個目が青となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，2 個を続けて取り出して，2 個目の色が青だったとき，1 個目が白である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

3. m と n は未知だが合計は $m + n = 9$ とする．箱から取り出した 2 つの球が同色となる確率が 1/2 となるとき，n の値は小さい順に $\boxed{\text{ケ}}$ または $\boxed{\text{コ}}$ である．

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙（その１）を使用すること**.

(1) 原点Oを中心とする半径1の円と点 A$(-2, 0)$ を通る直線との2つの交点を，Aから近い順にP, Qとし，座標 $(1, 0)$ の点をBとする．$\triangle$OPQの面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ で，そのとき $\angle\text{POQ} = \boxed{\text{ウエ}}$ °である．また，$\triangle$BPQの面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で，そのとき $\angle\text{PBQ} = \boxed{\text{キク}}$ °である．

(2) ある実数 s, u, v について，2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ は，任意の係数 a, b, c に対して次の関係を満たすものとする．

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = uf(s) + vf(1)$$

このとき， $s = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $u = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$, $v = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(3) 関数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ と関数 $g(x) = ax$ $(a > 0)$ が与えられている．方程式 $f(x) = g(x)$ が異なる3つの実数解 $x = 0, \alpha, \beta$ $(0 < \alpha < \beta)$ をもつとき，以下の問に答えよ．

1. a のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} < a < \boxed{\text{ウ}}$ である．
2. 関数 $f(x) - g(x)$ は $0 \leqq x \leqq \beta$ の区間で

$$x = \frac{\boxed{\text{エ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}\,a + \boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

において最大値または最小値をとる．

3. 関数 $f(x) - g(x)$ の $0 \leqq x \leqq \beta$ の区間における最大値の絶対値と最小値の絶対値が等しくなるのは $a = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のときである．

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙(その2)を使用すること**.

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は，すべての項が正で，$\dfrac{y_n}{x_n} \leqq \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ の関係を満たしている.
x_1 から x_n までの和を X_n で，また y_1 から y_n までの和を Y_n で表す.
このとき次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{Y_1}{X_1} \leqq \dfrac{Y_2}{X_2}$ を示せ.

(2) $\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{y_n}{x_n}$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) 問(2)の不等式を使って，$\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}$ であることを証明せよ.

（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている．ＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること．
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること．
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと．

問題の $\boxed{\text{アイ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ などの $\boxed{}$ には，ある整数が入る．これらを次の方法で解答欄に解答せよ．

(1) ア，イ，ウ，…のひとつひとつは，それぞれ0から9までの数字，または，−，±，＊のいずれかひとつに対応する．それらをア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークする．

マークは，◯を塗りつぶすことによっておこなう．訂正するときは，消しゴムで完全に消すこと．╳をつけても，消したことにならない．

〔例〕 $\boxed{\text{アイ}}$ に −7 と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	＊
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	●	8	9	＊

〔例〕 $\boxed{\text{ウエ}}$ に 38 と答えたいとき

ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	＊
エ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	＊

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{オカキ}}$ に 4 と答えたいとき

オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	＊
カ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●
キ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊を付加する(この場合，最後の欄には2つのマークが入ることになる)．

〔例〕 $\boxed{\text{クケ}}$ に −365 と答えたいとき

ク	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	＊
ケ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	●

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{コサ}}$ に対して問題が

$x^2+1<0$ ならば $x \geqq \boxed{\text{コサ}}$

のとき

コ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●
サ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●

(5) 以上により，どの欄にもかならずマークが入ることになる．記入のない欄は，解答放棄とみなされる．

(6) 分数形で解答するときは既約分数とし，符号は分子につけること．

(7) 平方根はできるだけ開く．〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする．