2012年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　E

数　　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 解答用紙は必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと．

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙(その1)を使用すること**.

(1) 直線 $l : px-(p+1)y+2p-1=0$ （pは実数）が与えられている.

1. 直線lは，pの値に関わらず，定点($\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$)を通る.

2. 直線lが $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲でx軸と交わるとき，pのとりうる範囲は，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \leqq p \leqq \boxed{\text{キ}}$ である.

(2) 関数 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ は，$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ において極大値をとり，点 $(c,0)$ に関し点対称である．このとき，$a=\boxed{\text{アイ}}$，$b=\boxed{\text{ウ}}$，$c=\boxed{\text{エ}}$ である．また，$x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき極小値をとる.

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sin x$ は，$x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ において最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ において最小値 $\boxed{\text{クケ}}$ をとる.

(4) 放物線 $c_1 : y=-x^2+2x$ とx軸とが囲む部分の面積を放物線 $c_2 : y=qx^2$ （qは正の定数）が2等分する．このとき，qの値は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}-\boxed{\text{イ}}$ である.

(計算余白)

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙(その1)を使用すること**.

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ のとき, $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$, $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ である.

(2) $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$ とするとき, $\tan 4\beta=\dfrac{\boxed{アイウ}}{\boxed{エオカ}}$, $\tan\left(4\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケコ}}$ である.

(3) ある直円錐の頂点を P, 底面の直径の両端を A, B, 線分 AP の中点を Q とする.

1. 直円錐の高さが $\sqrt{5}$ で底面の半径が 2 のとき, 線分 AP の長さは $\overline{AP}=\boxed{ア}$ である.
2. 側面上で A から B に至る最短距離は $\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$ である.
3. 側面上で B から Q に至る最短距離は $\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である.

(計算余白)

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) $(a-b)^3(b-c)^4(c-a)^5$ の展開式を項別に整理すると，a^8b^4 の係数は $\boxed{\text{アイ}}$ ，a^5b^6c の係数は $\boxed{\text{ウエ}}$ ，$a^3b^4c^5$ の係数は $\boxed{\text{オカ}}$ である.

(2) 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=1$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=1$ をみたすように動く.

1. $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となり，このとき，$|\vec{a}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$|\vec{b}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である.
2. $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となり，このとき，$|\vec{a}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$|\vec{b}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である.

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項が，それぞれ，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

および

$$b_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

で与えられている．ただし，i は虚数単位を表す.

1. $a_3=\boxed{\text{ア}}$ ，$a_7=\boxed{\text{イウ}}$ ，$a_{12}=\boxed{\text{エオカ}}$ である.
2. $b_2=\boxed{\text{キク}}$ ，$b_7=\boxed{\text{ケ}}$ ，$b_{15}=\boxed{\text{コサ}}$ である.

（計算余白）

IV 以下の問題については **解答用紙 (その2)** を使用すること．

直径 1 の円に内接する正方形と外接する正方形について，周の長さの逆数をそれぞれ a_0, b_0 として，整数 $n \geqq 1$ に対して $b_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$，$a_n = \sqrt{a_{n-1} b_n}$ と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_0, b_0 を求めよ．

(2) $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$，$a_1 = \sqrt{a_0 b_1}$ について，$b_0 < b_1 < a_1 < a_0$ となることを示せ．

(3) 一般に直径 1 の円に内接する正 n 角形の周の逆数を a，外接する正 n 角形の周の逆数を b とする．正 n 角形の 1 辺に対する中心角の半分を $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とすると，$a = \dfrac{1}{n \sin \theta}$，$b = \dfrac{1}{n \tan \theta}$ と表されることを，**図を用いて**示せ．

(4) 前問の a, b を用いて $b' = \dfrac{a+b}{2}$，$a' = \sqrt{ab'}$ とおくと，これらはそれぞれ円に内接，外接する正 $2n$ 角形の周の逆数であることを示せ．具体的には，角 $\theta' = \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2n}$ を用いて $a' = \dfrac{1}{2n \sin \theta'}$，$b' = \dfrac{1}{2n \tan \theta'}$ と表されることを確認せよ．

（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている．ＨＢの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること．
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること．
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと．

問題の $\boxed{\text{アイ}}$ ，$\boxed{\text{キ}}$ などの $\boxed{}$ には，ある整数が入る．これらを次の方法で解答欄に解答せよ．

(1) ア，イ，ウ，…のひとつひとつは，それぞれ0から9までの数字，または，－，±，＊のいずれかひとつに対応する．それらをア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークする．

マークは，○を塗りつぶすことによっておこなう．訂正するときは，消しゴムで完全に消すこと．×をつけても，消したことにならない．

〔例〕 $\boxed{\text{アイ}}$ に－7と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	＊
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	●	8	9	＊

〔例〕 $\boxed{\text{ウエ}}$ に38と答えたいとき

ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	＊
エ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	＊

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{オカキ}}$ に4と答えたいとき

オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	＊
カ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●
キ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊を付加する(この場合，最後の欄には2つのマークが入ることになる)．

〔例〕 $\boxed{\text{クケ}}$ に－365と答えたいとき

ク	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	＊
ケ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	●

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{コサ}}$ に対して問題が

$x^2+1<0$ ならば $x \geqq \boxed{\text{コサ}}$

のとき

コ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●
サ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	●

(5) 以上により，どの欄にもかならずマークが入ることになる．記入のない欄は，解答放棄とみなされる．

(6) 分数形で解答するときは既約分数とし，符号は分子につけること．

(7) 平方根はできるだけ開く．〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする．