2016年度 E

数　学

注　意

1. 問題は全部で８ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その１はマーク・シート，その２は記述式)は両方とも必ず提出のこと. この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること. ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\mathrm{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること.**

(1) 次の問いに答えよ.

1. 分数式を $\dfrac{\dfrac{5}{\frac{x}{2}-1}}{\dfrac{3}{\frac{x}{2}+1}} = \dfrac{ax+b}{cx-6}+1$ と書くとき, $a = \boxed{1}$, $b = \boxed{2\,\vdots\,3}$, $c = \boxed{4}$ である.

2. 2 次方程式 $2x^2-6x+3=0$ の 2 つの解を α, β とする.
このとき, $\alpha^2+\beta^2$ の値は $\boxed{5}$, $\alpha^3+\beta^3$ の値は $\dfrac{\boxed{6\,\vdots\,7}}{\boxed{8}}$ である.

(2) 関数 $y = -\left(\log_2 \dfrac{x}{8}\right)^2 + \log_2 x^3 + 4$ は, $2 \leqq x \leqq 32$ の範囲において,
$x = \boxed{9\,\vdots\,10}\sqrt{\boxed{11}}$ のときに最大値 $\dfrac{\boxed{12\,\vdots\,13}}{\boxed{14}}$ を, $x = \boxed{15}$ のときに最小値 $\boxed{16}$ をとる.

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

1. $\cos 2\theta + \cos\theta > 0$ を θ について解くと, $0 \leqq \theta < \dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\pi$ である.

2. $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta > 1$ を θ について解くと, $0 \leqq \theta < \dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}\pi$ である.

(4) 箱 A, B がある. 箱 A には赤玉 3 個と白玉 7 個で計 10 個の玉, また箱 B には赤玉と白玉がそれぞれ 5 個ずつ計 10 個の玉が入っている. 箱 A, B から 1 つの箱を選び, その中から 1 つ玉を取り出す.

1. 赤玉が出る確率は $\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$ である.

2. 赤玉が出たとき, 箱 A から選ばれた確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 点 (x,y) は，４つの不等式 $x+2y-5 \leqq 0$, $3x+y-8 \leqq 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の表す領域を動く．このとき，$ax+y$ (ただし $a>0$) の最大値は，$a \leqq \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}$ のとき $\dfrac{\boxed{27}}{\boxed{28}}$, $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}} < a < \boxed{29}$ のとき $\dfrac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}}a + \dfrac{\boxed{33}}{\boxed{34}}$, $a \geqq \boxed{29}$ のとき $\dfrac{\boxed{35}}{\boxed{36}}a$ であり，最小値は $\boxed{37}$ である.

(2) 次の問いに答えよ.

1. 2つの変量 x と y について，x の分散が 4, y の分散が 9, x と y の相関係数が 0.5 と与えられている．このとき x と y の共分散は $\boxed{38}$ である.

2. ある工場で生産された製品1個あたりの長さの分布の母標準偏差 σ は 1cm である．その母平均 m を信頼度 95% で推定するとき，信頼区間の幅を 0.2cm 以下にするためには，標本の大きさ n を少なくとも $\boxed{39}\boxed{40}\boxed{41}$ にすればよい.

(3) 関数 $f(x)=ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$ は，次の２つの等式を満たす.

$$\int_0^x tf(t)dt = xg(x)+ex+f$$

$$g(x) = x^2 + x\int_0^1 f(t)dt + 1$$

このとき，$a = \boxed{42}$, $b = \boxed{43}\boxed{44}$, $c = \dfrac{\boxed{45}\boxed{46}}{\boxed{47}}$, $d = \boxed{48}$, $e = \boxed{49}\boxed{50}$, $f = \boxed{51}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その１) を使用すること**.

(1) 年利率 2.5% の複利で，年のはじめに 1 千ドルずつ毎年外貨預金をすることにした. 1 年後の元利合計が 1.025 千ドルとすると，元利合計が 3 万ドルを初めて越えるのは $\boxed{52\,\vdots\,53}$ 年後となる．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 4.1 = 0.6128$，$\log_{10} 7.1 = 0.8513$ として計算せよ.

(2) 次の問いに答えよ.

1. 下の表は, 独立な確率変数 X, Y の確率分布である．X と Y は，それぞれ 1, 2, 3 の値をとり，$P(X = 1,\ Y = 2) = 0.2$ である．このとき (ハ) の値 $P(X = 3)$ は $0.\boxed{54}$ である.

x	$P(X = x)$
1	(イ)
2	0.3
3	(ハ)

y	$P(Y = y)$
1	0.3
2	(ロ)
3	0.3

2. 大小 2 個のさいころを同時に投げ，それぞれのさいころの出る目を X，Y とし，$Z = |X - Y|$ とおく．このとき $E(Z) = \dfrac{\boxed{55\,\vdots\,56}}{\boxed{57\,\vdots\,58}}$ である.

(3) $\triangle$ABC において，各辺の長さを AB = 4，BC = 3，CA = 5 とする．辺 AB 上に点 D，AC 上に点 E をとって $\triangle$ADE を作る．$\triangle$ADE の面積が $\triangle$ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ であるとき次の問いに答えよ.

1. 線分 AD と AE の積は，$\boxed{59\,\vdots\,60}$ である.

2. 線分 DE の最小値は，$\boxed{61}$ である.

3. $\triangle$ADE の周の長さの最小値は，$\boxed{62} + \boxed{63}\sqrt{\boxed{64\,\vdots\,65}}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その２) を使用すること**.

関数 $f(x)$ は

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

を満足する. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $m = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m})}{2^m}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(2) $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n$ が与えられたとき, $n < 2^m$ を満たす m をとり

$$y_k = \begin{cases} x_k & (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} & (k=n+1,\ \cdots, 2^m) \end{cases}$$

とおく. このとき

$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{2^m}}{2^m} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

を示せ.

(3) 上の２つの結果を用いて

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

を示せ.

（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

(1)　問題の文中の $\boxed{1}$，$\boxed{2 \,\vdots\, 3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(0～9)，文字(a，b，c，d)，または記号(＊)が入る．1，2，3，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の1，2，3，… で示された解答欄にマークして答えよ．

例　$\boxed{11 \,\vdots\, 12 \,\vdots\, 13}$ に －83 と答えたいとき

11	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
12	－	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d	＊
13	－	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊

(2)　解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らせる)に＊をマークする．

例　$\boxed{14 \,\vdots\, 15}$ に 4 と答えたいとき

14	－	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
15	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(3)　解答欄が不足するときは，最後の欄に＊をマークする．

例　$\boxed{16 \,\vdots\, 17}$ に 345 と答えたいとき

16	－	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
17	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(4)　解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

例　$\boxed{18 \,\vdots\, 19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geqq \boxed{18 \,\vdots\, 19}$$

のとき

18	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●
19	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(5)　分数形で解答するときは，既約分数として符号は分子につける．

(6)　根号あるいは対数を含む形で解答するときは，根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える．[例] $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$，$3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする．

(7)　分数形で根号を含む形で解答するときは，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく，$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する．