2014年度 E

数　　学

注　意

1. 問題は全部で8ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙は必ず提出のこと．この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) 関数 $f(x)=2^{2x-1}-2^{x+2}+3$ は, $-2 \leqq x \leqq 3$ の範囲で, $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{イ}}$, $x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{エオ}}$ をとる.

(2) ある国の今年の GDP（国内総生産）が 5^{21} 円であるとして, 以下の問いに答えよ. ただし, $\log_{10} 2=0.3010$, $\log_{10} 3=0.4771$, $\log_{10} 1.02=0.0086$ とする.

1. 5^{21} は $\boxed{\text{アイ}}$ 桁の数である.
2. 5^{21} の最高位の数字は $\boxed{\text{ウ}}$ である.
3. GDP の増加率が年率 2% であるとすると, GDP が 1.5 倍を越えるのは $\boxed{\text{エオ}}$ 年後である.

(3) n を奇数とするとき, 多項式 $P(x)=2x^n-x^{n-1}+\cdots+2x^5-x^4+2x^3-x^2+2x-1$ を $P(x)=\dfrac{(a+bx)(c-x^{dn+e})}{f-x^g}$ と変形すると, $a=$ $\boxed{\text{アイ}}$, $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$, $c=$ $\boxed{\text{エ}}$, $d=$ $\boxed{\text{オ}}$, $e=$ $\boxed{\text{カ}}$, $f=$ $\boxed{\text{キ}}$, $g=$ $\boxed{\text{ク}}$ である.

(4) 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC 上に点 P を, 辺 CD 上に点 Q を, BP と QD の長さが等しくなるようにとる.

1. △APQ が正三角形になるとき, PQ の長さは $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ で, △APQ の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}-\boxed{\text{オ}}$ となる.
2. △APQ の面積が最大になるのは, PQ の長さが $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときで, その面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については **解答用紙 (その 1) を使用すること**.

(1) ΔABC において辺 BC の中点を M とする．AB $= 15$, BC $= 18$, CA $= 12$ が与えられたとき，以下の値を求めよ.

1. $\cos\angle \mathrm{ABC}$ は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2. ΔABC の面積は $\dfrac{\boxed{ウエオ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$

3. 線分 AM の長さは $\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$

4. ΔABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{シス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$

5. ΔABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$

(2) ΔABC の辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$ に内分する点を C_1, A_1, B_1 とする．さらに $\Delta \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ の辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1$ をそれぞれ $2:1$ に内分する点を C_2, A_2, B_2 とし，続いて同様に $\Delta \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を定め，$\Delta \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を s_n と表す．また ΔABC の面積を $s_0 = 1$ とする.

1. $\Delta \mathrm{AB}_1\mathrm{C}_1$ の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2. $\Delta \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ の面積 s_1 は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

3. $\Delta \mathrm{A}_4\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4$ の面積 s_4 は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$

4. 面積の和 $s_0 + s_1 + \cdots + s_{99}$ を $A\left(1 - R^{100}\right)$ と表すと，$A = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$, $R = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である.

(計算余白)

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については **解答用紙（その１）を使用すること**.

(1) 多項式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は, $x^2 + 2x + 3$ で割ると $x + 1$ 余り, $x^2 + 1$ で割ると 1 余る. このとき $a = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $b = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$, $c = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$, $d = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である. また $P(x)$ を $x + 3$ で割ると $\boxed{\text{シ}}$ 余る.

(2) 関数 $f(x) = x^2 - a^2$ に関し, a が $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき, $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$ が最小になるのは $a = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときであり, 最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である. また最大になるのは $a = \boxed{\text{オ}}$ のときであり, 最大値は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である.

(3) 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に関し, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, また $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角は 60° とする. t を実数として, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるのは $t = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ のときであり, 最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である. このとき $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} = \boxed{\text{カ}}$ となる. また $|(1 - t)\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるのは $t = \boxed{\text{キ}}$ のときであり, 最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である.

(4) $2x^2 + y^2 = 6$ という関係を満たす実数 x, y について, $z = x + y$ は $x = \boxed{\text{ア}}$, $y = \boxed{\text{イ}}$ のときに最大となり, 最大値は $z = \boxed{\text{ウ}}$ である.

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については **解答用紙（その２）を使用すること**.

箱から球を取り出す問題に関して，以下の問いに答えよ．

(1) 箱の中に 20 個の球があり，そのうち 8 個が赤，12 個が白とする．よくかき混ぜてから 3 個の球を取り出したとき，1 個が赤，2 個が白となる確率を求めよ．

(2) 白球だけが箱に入っていて，その個数 N は未知である．箱から R 個を取り出して赤い印をつけてから箱に戻し，よくかき混ぜてから，n 個を取り出したとき，r 個に赤い印がついていた場合を考える．このような結果が出る確率は未知の N に依存するから，それを $f(N)$ とする．$f(N)$ を N, R, n, r を用いて表せ．

(3) 前問で $f(N) > f(N-1)$ となる条件を求めよ．

(4) $R = 20$，$n = 25$ に対して $r = 6$ が得られたとき，$f(N)$ を最大にする N を求めよ．

(計算余白)

マーク・シート記入上の注意

1. 解答用紙(その1)はマーク・シートになっている．HBの黒鉛筆またはシャープペンシルを用いて記入すること．
2. 解答用紙にあらかじめプリントされた受験番号を確認すること．
3. 解答用紙をよごしたり折り曲げたりしないこと．

問題の $\boxed{\text{アイ}}$ ， $\boxed{\text{キ}}$ などの $\boxed{\phantom{\text{アイ}}}$ には，ある整数が入る．これらを次の方法で解答欄に解答せよ．

(1) ア，イ，ウ，…のひとつひとつは，それぞれ0から9までの数字，または，－，±，＊のいずれかひとつに対応する．それらをア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークする．

マークは，◯を塗りつぶすことによっておこなう．訂正するときは，消しゴムで完全に消すこと．╳をつけても，消したことにならない．

〔例〕 $\boxed{\text{アイ}}$ に－7と答えたいとき

〔例〕 $\boxed{\text{ウエ}}$ に38と答えたいとき

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らす)に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{オカキ}}$ に4と答えたいとき

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊を付加する(この場合，最後の欄には2つのマークが入ることになる)．

〔例〕 $\boxed{\text{クケ}}$ に－365と答えたいとき

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

〔例〕 $\boxed{\text{コサ}}$ に対して問題が

$x^2+1<0$ ならば $x \geqq \boxed{\text{コサ}}$

のとき

(5) 以上により，どの欄にもかならずマークが入ることになる．記入のない欄は，解答放棄とみなされる．

(6) 分数形で解答するときは既約分数とし，符号は分子につけること．

(7) 平方根はできるだけ開く．〔例〕 $\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$ とする．