数　　学

注　意

1. 問題は全部で10ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙に記入すること.
4. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない.
5. 解答用紙(その1はマーク・シート，その2は記述式)は両方とも必ず提出のこと．この問題冊子は提出する必要はない.

マーク・シート記入上の注意については，この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること．ただし，冊子は開かないこと.

$\boxed{\text{I}}$ 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること.

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする.

このとき，$2a^2+ab+3b^2$ の値は $\boxed{1\,|\,2} - \boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}$ である.

(2) 分数式を

$$\frac{x(2x-3)}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x-1}}} - \frac{3x-5}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}} = ax^2+bx+c$$

と書くとき，$a = \boxed{5}$, $b = \boxed{6\,|\,7}$, $c = \boxed{8}$ である.

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，

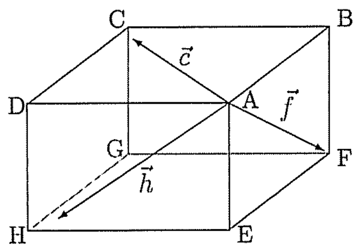
1. $\sin\theta + \cos\theta$ の最小値は $\boxed{9\,|\,10}$，最大値は $\sqrt{\boxed{11}}$ である.
2. $\sin\theta\cos\theta$ の最小値は $\dfrac{\boxed{12\,|\,13}}{\boxed{14}}$，最大値は $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である.
3. $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の最小値は $\boxed{17\,|\,18}$，最大値は $\boxed{19}$ である.

(4) 2 次方程式 $-2x^2+(2-a)x-(a+1)^2+7$ の 2 解を α，β とする.

このとき，$-2 < \alpha < -1 < \beta < 2$ となるような定数 a の範囲は次の式で与えられる.

$$-\boxed{20} + \sqrt{\boxed{21}} < a < \boxed{22}$$

(5) 図の平行六面体 ABCD-EFGH において $\overline{\mathrm{AC}} = \vec{c}$, $\overline{\mathrm{AF}} = \vec{f}$, $\overline{\mathrm{AH}} = \vec{h}$ とする.



このとき $b_1 = \boxed{23}$, $b_2 = \boxed{24}$, $b_3 = \boxed{25\,|\,26}$, $g_1 = \boxed{27}$, $g_2 = \boxed{28}$, $g_3 = \boxed{29}$ とおくと，$\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{b_1\vec{c}+b_2\vec{f}+b_3\vec{h}}{2}$, $\overline{\mathrm{AG}} = \dfrac{g_1\vec{c}+g_2\vec{f}+g_3\vec{h}}{2}$ と表される.

（計算余白）

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問題については 解答用紙 (その１) を使用すること.

(1) 連立不等式 $y \leqq 2(1-x^2)$, $y \geqq 0$ の表す領域を D とする. 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が放物線 $y = 2(1-x^2)$ 上を動くとき, 点 P と領域 D に含まれる y 軸上の点 $\mathrm{C}(0, c)$ との距離の最小値を m とする.

1. $c \leqq \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ のとき, $m^2 = \dfrac{\boxed{32}\boxed{33}}{\boxed{34}\boxed{35}} - \dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}}c$, かつ, P の y 座標は $y = c + \dfrac{\boxed{38}}{\boxed{39}}$ であり,

2. $c > \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}$ のとき, $m = \boxed{40} - c$, かつ, P の y 座標は $y = \boxed{41}$ である.

したがって, 領域 D に含まれて中心を y 軸上にもつ, 最大の円の中心は, $\left(0, \dfrac{\boxed{42}}{\boxed{43}}\right)$ であり, 半径は $\dfrac{\boxed{44}}{\boxed{45}}$ である.

(2) 三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ において 3 辺の長さを $a = \overline{\mathrm{BC}}$, $b = \overline{\mathrm{CA}}$, $c = \overline{\mathrm{AB}}$ $(c > b > a)$ とする. $\angle\mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P, $\angle\mathrm{A}$ の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を Q とする. このとき線分 $\overline{\mathrm{PC}}, \overline{\mathrm{QC}}$ の長さを表す式を以下の選択肢から選べ.

$$\overline{\mathrm{PC}} = \boxed{46}, \quad \overline{\mathrm{QC}} = \boxed{47}$$

選択肢： (a) $\dfrac{bc}{b+c}$ (b) $\dfrac{ab}{b+c}$ (c) $\dfrac{ab}{c-b}$ (d) $\dfrac{bc}{c-b}$

(3) $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ $(a, b, c, d > 0)$ とする.

1. $\alpha^2 = i$ なら a^2, b^2 は次の値を取る.

$$a^2 = \frac{\boxed{48}}{\boxed{49}}, \quad b^2 = \frac{\boxed{50}}{\boxed{51}}$$

2. $\beta^3 = i$ なら c^2, d^2 は次の値を取る.

$$c^2 = \frac{\boxed{52}}{\boxed{53}}, \quad d^2 = \frac{\boxed{54}}{\boxed{55}}$$

3. この $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ に関して $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \boxed{56}$ となる.

(4) 関数 $f(x) = (2^x + 2^{-x})^2 - 3(4^x + 4^{-x}) + 2^{1+x} + 2^{1-x}$ は, $x = \boxed{57}$ のときに最大値 $\boxed{58}$ をとる.

（計算余白）

$\boxed{\text{III}}$ 以下の問題については 解答用紙 (その 1) を使用すること.

(1) 座標空間の原点 O および 3 点 A(1,0,2), B(2,2,2), C(0,1,2) を頂点とする四面体 OABC を考える. 頂点 A から △OBC に下ろした垂線を AD とする.

線分 AD の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{59}}}{\boxed{60}}$ である. また, $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}}\overrightarrow{OB} + \dfrac{\boxed{63}}{\boxed{64}}\overrightarrow{OC}$ と表される.

次に, 頂点 A, C から対辺 OB に下ろした垂線をそれぞれ AE, CF とする. 有向線分 EA, FC とそれぞれ同じ向き, 長さをもつ有向線分 OG, OH を考える. 点 G から線分 OH に下ろした垂線を GI とする.

線分 GI の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{65}}}{\boxed{66}}$ である. また, $\overrightarrow{OI} = \dfrac{\boxed{67}}{\boxed{68}}\overrightarrow{OH}$ と表される.

(2) 数列

$$a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{3}},\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}},\ a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}, \cdots,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

に対して, その部分和を $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ とおくとき,

$$S_4 = \boxed{69},\quad S_{12} = \boxed{70},\quad S_{40} = \boxed{71}$$

である.

(3) 数列

$$b_1 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ b_2 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\ \cdots,\ b_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

に対して, その部分和を $T_n = b_1 + \cdots + b_n$ とおくとき,

$$T_3 = \frac{\boxed{72}}{\boxed{73}\boxed{74}},\quad T_5 = \frac{\boxed{75}}{\boxed{76}\boxed{77}}$$

である.

（計算余白）

(4) 箱の中に赤 a 枚，白 b 枚のカード $(a > b > 0)$ が入っていて，箱からもとに戻さずに1枚ずつカードを取り出す．最初に原点Oにある点Pは，赤が出ると右に1，白が出ると上に1，(x, y) 座標の上を移動する．原点から出発して常に $x > y$ のままで点 $\mathrm{A}(a, b)$ に到達する確率を求めたい．いま原点から点 (m, n) に至る経路の総数を $M_{m,n}$ と表すことにする．たとえば $M_{2,1} = 3$，$M_{3,2} = \boxed{78|79}$ である．

1. 原点Oから出発して，$a = 5, b = 3$ のとき，常に $x > y$ のまま点Aに達する経路の数は $\boxed{80|81}$，$x > y$ のまま点Aに達する確率は $\dfrac{\boxed{82}}{\boxed{83}}$ である．
2. 点 $(0, 1)$ から点Aに達する経路の数と，原点Oから点Aに達する経路の数の比は $a = 6, b = 4$ のとき $\dfrac{M_{a,b-1}}{M_{a,b}} = \dfrac{\boxed{84}}{\boxed{85}}$ である．
3. もとの問題を解くためのヒントとして，直線 $x = y$ に関してAと対称な点 $\mathrm{B}(b, a)$ を考える．点 $(0, 1)$ から点Aに達する経路の数と点 $(1, 0)$ から点Bに達する経路の数の差は，$a = 5, b = 4$ のとき $\boxed{86}$ である．
4. $a = 10, b = 8$ のとき，1枚目のカードが赤かつ一度は $x = y$ (原点を除く) となって点Aに達する確率と，1枚目のカードが白となる確率の比 $\boxed{87}$ を，次の選択肢から選べ．

   選択肢： (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{5}{9}$ (c) $\dfrac{4}{5}$ (d) 1

   このことから，$a = 10, b = 8$ のとき，原点から出発して常に $x > y$ のままで点Aに達する確率は $\dfrac{\boxed{88}}{\boxed{89}}$ と求められる．
5. ある選挙が終わり，投票箱の中にA候補の得票 a 枚とB候補の得票 b 枚が入っている $(a > b > 0)$．1枚ずつ開票していくとき，どの段階でもA候補がB候補をリードしたままで開票が終わる確率は，$a = 2500, b = 1500$ のとき，$\dfrac{\boxed{90}}{\boxed{91}}$ となる．

（計算余白）

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問題については 解答用紙(その2)を使用すること．

xy 平面の第一象限上の任意の 2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) (ただし $0 < x_1 < x_2$, $0 < y_2 < y_1$) に対して，(x_0, y_0) をこれら 2 点の中点とするとき，2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) に関する弾力性 e を，次のように定義する．

$$e = \frac{\dfrac{y_1 - y_2}{y_0}}{\dfrac{x_2 - x_1}{x_0}}$$

また，S_1 を，4 つの点 (x_1, y_1)，$(x_1, 0)$，$(0, 0)$，$(0, y_1)$ を頂点とする四角形の面積，S_2 を，4 つの点 (x_2, y_2)，$(x_2, 0)$，$(0, 0)$，$(0, y_2)$ を頂点とする四角形の面積とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = -ax + b$ $(a, b > 0)$ 上に位置する 2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) に関する弾力性の値が $e = 1$ となるとき，中点 (x_0, y_0) の座標を求めよ．

(2) 曲線 $xy = k$ $(k > 0)$ 上に位置する 2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) に関する弾力性 e の値を求めよ．

(3) $S_A = S_1 - S_2$，$S_B = x_2 y_1 - x_1 y_2$ とするとき，e を S_A と S_B を用いて表せ．

(4) $S_1 > S_2$ となるための必要十分条件を e を用いて表せ．

（計算余白）

マーク・シート記入上の注意

(1) 問題の文中の $\boxed{1}$, $\boxed{2 \mid 3}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(０～９)，文字(a，b，c，d)，または記号(＊)が入る．1，2，3，… の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する．それらを解答用紙の 1，2，3，… で示された解答欄にマークして答えよ．

例 $\boxed{11 \mid 12 \mid 13}$ に －83 と答えたいとき

11	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
12	−	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d	＊
13	−	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊

(2) 解答欄が余るときは，余った欄(後の方を余らせる)に＊をマークする．

例 $\boxed{14 \mid 15}$ に 4 と答えたいとき

14	−	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
15	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(3) 解答欄が不足するときは，最後の欄に＊をマークする．

例 $\boxed{16 \mid 17}$ に 345 と答えたいとき

16	−	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	＊
17	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(4) 解答欄に適合するものがないときは，その欄に＊をマークする．

例 $\boxed{18 \mid 19}$ に対して問題が

$$x^2 + 1 < 0 \text{ ならば } x \geqq \boxed{18 \mid 19}$$

のとき

18	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●
19	−	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	●

(5) 分数形で解答するときは，既約分数として符号は分子につける．

(6) 根号あるいは対数を含む形で解答するときは，根号の中や真数に現れる自然数が最小になる形で答える．［例］$\sqrt{8}$ は $2\sqrt{2}$，$3\log_2 9$ は $6\log_2 3$ とする．

(7) 分数形で根号を含む形で解答するときは，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ ではなく，$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ のように約分する．