

数 学

注 意

1. 問題は全部で5題あり、冊子は計算用の余白もあわせて12ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。
3. 解答は解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. 問題2, 4, 5の解答については、論述なしで結果だけ記しても、正解とはみなさない。
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはならない。
6. 解答用紙はすべて必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

(計算用余白)

[計算用余白]

1 解答を解答用紙(その1)の 1 欄に記入せよ。結果のみを記すこと。

定数 k に対して、 θ に関する次の不等式を考える。

$$\cos \theta + k \sin \theta \leq 2k$$

- (1) この不等式が、すべての実数 θ について成り立つような k の値の範囲は である。
- (2) この不等式を満たす実数 θ が、少なくとも1つ存在するような k の値の範囲は である。

(計算用余白)

2 解答を解答用紙(その1)の 2 欄に記入せよ.

四面体 OABC において,

$$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2,$$

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad \angle COA = \frac{\pi}{2}$$

であるとする. 線分 OA の中点を P, 線分 OB を 2 : 1 に内分する点を Q, 線分 OC の中点を R とし, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく. このとき以下に答えよ.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ.

(2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ.

(計算用余白)

3 解答を解答用紙(その2)の 3 欄に記入せよ。結果のみを記すこと。

文字列「AOYAMA」を用意し、さいころを投げて、出た目によってこの文字列を変えていく。出た目の数が1のときには、文字列に残っているAのうち、一番左のものを取り去る。出た目の数が2, 3, 4のときには、それぞれO, Y, Mを取り去る。出た目の数が5, 6のとき、あるいは対応する文字が残っていないときには、文字列は変えない。

- (1) さいころを2回投げたとき、文字列が「YAMA」になる確率は である。
- (2) さいころを2回投げたとき、文字列の長さが4になる、すなわち、残っている文字の個数が4になる確率は である。
- (3) さいころを2回投げたときの文字列の長さ、すなわち残っている文字の個数の期待値は である。

[計算用余白]

4 解答を解答用紙(その2)の 4 欄に記入せよ.

1 辺の長さが 1 の正方形 $OA_1B_1C_1$ に対し, その 1 辺 OC_1 を対角線とする新たな正方形 $OA_2B_2C_2$ をつくる. ただし, B_2 は C_1 であり, また頂点 C_2 は, もとの正方形 $OA_1B_1C_1$ の外部にあるものとする. 同様に, 正方形 $OA_2B_2C_2$ に対し, その 1 辺 OC_2 を対角線とする新たな正方形 $OA_3B_3C_3$ をつくる. ただし, 頂点 C_3 は正方形 $OA_2B_2C_2$ の外部にあるものとする. この操作を繰り返して, 正方形 $OA_4B_4C_4$, $OA_5B_5C_5$, \dots をつくる.

- (1) n 番目の正方形 $OA_nB_nC_n$ の 1 辺の長さを求めよ.
- (2) 7 つの正方形 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$, \dots , $OA_7B_7C_7$ をあわせてできる図形を S とする. 図形 S を図示し, その面積を求めよ.
- (3) $n \geq 2$ に対して, 折れ線 $B_1C_1C_2 \cdots C_n$ の長さを l_n とする. すなわち,

$$l_n = B_1C_1 + C_1C_2 + \cdots + C_{n-1}C_n$$

である. このとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ.

(計算用余白)

5 解答を解答用紙(その3)の 5 欄に記入せよ.

(1) 関数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ の $x > 0$ における最小値を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \frac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ.

(3) $x > 0$ の範囲で, 不等式 $e^x > \log x$ が成り立つことを示せ.

(4) $y = e^x$ のグラフ, $y = \log x$ のグラフ, および直線 $x = 1$, $x = 2$ で囲まれた図形を, x 軸のまわりに1回転してできる回転体を考える. この回転体の体積を求めよ.

(計算用余白)

