

## 数 学

## 注 意

1. 問題は全部で5題あり、冊子は計算用の余白もあわせて12ページである。
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること。(ただし、マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている。)
3. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入すること。指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない。
4. 問題3, 4, 5の解答については、論述なしで結果だけ記しても、正解とは見なさない。
5. 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはならない。
6. 解答用紙はすべて必ず提出すること。問題冊子は持ち帰ってよい。

マーク・シート記入上の注意については、この問題冊子の裏表紙に記載されているので試験開始までに確認すること。ただし、冊子を開いてはならない。

[計算用余白]

〔計算用余白〕

**1** 解答を解答用紙(その1)に記入せよ.

(1)  $a, b$  が

$$2^{a+b} = 4, \quad 3^{3ab} = \frac{1}{9}, \quad a \geq b$$

を同時に満たすとき,  $a = \frac{\boxed{1} + \sqrt{\boxed{2}\boxed{3}}}{\boxed{4}}$  である.

(2)  $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$  のとき,  $x^2 + 3x = \boxed{5}\boxed{6}$  であり,

$$2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x + 7 = \boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$$
 である.

(3) 複素数平面上の点  $3+i$  を中心として点  $7+3i$  を  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転した点を表す複素数は

$$\boxed{9} + \boxed{10}\sqrt{\boxed{11}} + (\boxed{12} + \sqrt{\boxed{13}})i$$
 である.

[計算用余白]

2 解答を解答用紙(その1)に記入せよ.

$n = 1, 2, 3, \dots$  に対して自然数  $a_n$  を

$$a_n = \sum_{k=1}^n 4^{k-1} = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$$

で定める.

(1) 自然数  $a_{18}$  を自然数  $a_9$  で割った商は  $4^{\boxed{14}} + 4^{\boxed{15}}$  であり, 余りは  $\boxed{16}$  である. ただし  $\boxed{14} > \boxed{15}$  とする.

(2) 自然数  $a_{29}$  を自然数  $a_9$  で割った商は  $4^{\boxed{17}\boxed{18}} + 4^{\boxed{19}\boxed{20}} + 4^{\boxed{21}}$  であり, 余りは  $a_r$ ,  $r = \boxed{22}$ , に等しい. ただし  $\boxed{17}\boxed{18} > \boxed{19}\boxed{20} > \boxed{21}$  とする.

(3) 自然数  $a_n$  と自然数  $a_9$  が互いに素でないための必要十分条件は

$$n = \boxed{23}k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

である.

[計算用余白]

3 解答を解答用紙(その2)の 3 欄に記入せよ.

座標平面上に定点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$ ,  $B(2, 2)$  および点  $P$  がある. 点  $P$  は条件

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 1$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{OB} \geq 2$$

を満たしながら座標平面上を動く.

- (1) 点  $P$  の動く範囲を求め, 図示せよ.
- (2) 線分  $OP$  の長さの最大値と最小値を求めよ.



[計算用余白]

4 解答を解答用紙(その3)の 4 欄に記入せよ.

曲線  $C: y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$  について、次の間に答えよ.

ただし、すべての自然数  $n$  に対して  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x^2} = 0$  であることを用いてよい.

- (1) 曲線  $C$  上の点  $(t, te^{-\frac{t^2}{2}})$  における接線  $l$  の方程式を求めよ.
- (2) 接線  $l$  と  $y$  軸との交点の  $y$  座標を  $f(t)$  とする. 関数  $f(t)$  の増減を調べ, そのグラフの概形をかけ. グラフの凹凸は調べなくてよい.
- (3)  $y$  軸上の点  $(0, a)$  から曲線  $C$  に引くことのできる接線の本数を求めよ.

[計算用余白]

5 解答を解答用紙(その4)の 5 欄に記入せよ.

次の問に答えよ.

(1) 不定積分  $\int \sin^2 x dx$ ,  $\int \sin^2 2x dx$ ,  $\int \sin x \sin 2x dx$  を求めよ.

(2)  $a, b$  を実数とする. 定積分

$$I(a, b) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x + b \sin 2x)^2 dx$$

を  $a, b$  を用いて表せ.

(3) 実数  $a, b$  が  $a^2 + b^2 = 1$  を満たしながら動くとき,  $I(a, b)$  の最大値と最小値を求めよ. また, 最大値, 最小値をとるときの  $a, b$  の値を求めよ.

[計算用余白]





### マーク・シート記入上の注意

- 1 解答は、解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークすること。
- 2 問題の文中の  $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$  $\boxed{3}$  などには、特に指示がないかぎり、符号(-)、数字(0~9)又は文字(a~d)が入る。1, 2, 3, ... の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙の1, 2, 3, ... で示された解答欄にマークして答えよ。

例  $\boxed{1}$   $\boxed{2}$   $\boxed{3}$  に  $-83$  と答えたいとき

1	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
2	-	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	a	b	c	d
3	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d

なお、同一の問題文中に  $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$  $\boxed{3}$  などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$  $\boxed{3}$  のように細字で表記する。

- 3 分数形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけない。

例えば、 $\frac{\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{6}}$  に  $-\frac{4}{5}$  と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$  として答えよ。

また、それ以上約分できない形で答えること。

例えば、 $\frac{3}{4}$  と答えるところを、 $\frac{6}{8}$  のように答えてはいけない。

- 4 根号あるいは対数を含む形で解答する場合は、根号の中や真数に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

例えば、 $\boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}$  に  $4\sqrt{2}$  と答えるところを、 $2\sqrt{8}$  のように答えてはいけない。また、 $\boxed{9}\log_2\boxed{10}$  に  $6\log_2 3$  と答えるところを、 $3\log_2 9$  のように答えてはいけない。

- 5 分数形で根号を含む形で解答する場合、 $\frac{\boxed{11} + \boxed{12}\sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{14}}$  に  $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$

と答えるところを、 $\frac{6 + 4\sqrt{2}}{4}$  や  $\frac{6 + 2\sqrt{8}}{4}$  のように答えてはいけない。