2011年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　S②

数　　学

注　意

1. 問題は全部で５題あり，冊子は計算用の余白もあわせて12ページである.
2. 解答用紙に氏名・受験番号を忘れずに記入すること.（ただし，マーク・シートにはあらかじめ受験番号がプリントされている.）
3. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入すること. 指定の欄以外に記入されたものは採点の対象としない.
4. マーク・シート記入については，解答用紙(その１)の「解答上の注意」にしたがうこと.
5. 問題３，４，５の解答については，論述なしで結果だけ記しても，正解とはみなさない.
6. 解答用紙はすべて必ず提出すること. 問題冊子は持ち帰ってよい.

〔計 算 用 余 白〕

〔計 算 用 余 白〕

$\boxed{1}$ 解答を解答用紙(その１)の $\boxed{1}$ 欄に記入せよ.

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(1) 方程式 $\sin 8\theta = 0$ の解の個数は $\boxed{ア}\boxed{イ}$ である.

(2) 方程式 $\cos 6\theta = 0$ の解の個数は $\boxed{ウ}\boxed{エ}$ である.

(3) 方程式 $\sin 14\theta + \sin 2\theta = 0$ の解の個数は $\boxed{オ}\boxed{カ}$ である.

〔計 算 用 余 白〕

$\boxed{2}$ 解答を解答用紙(その１)の $\boxed{2}$ 欄に記入せよ.

四面体OABCを考える．また $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく．次の問に答えよ．ただし，解答の分数は既約分数とする．

(1) 線分ABを 2：1 に内分する点をDとする．このとき $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表すと $\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}$ である．

(2) 線分BCを 1：3 に内分する点をEとし，直線CDとAEの交点をPとする．$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\boxed{サ}\boxed{シ}}\left(\boxed{ス}\vec{a}+\boxed{セ}\vec{b}+\boxed{ソ}\vec{c}\right)$$

である．

(3) 四面体OAPCの体積は，四面体OABCの体積の $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}\boxed{ツ}}$ 倍である．

〔計 算 用 余 白〕

$\boxed{3}$ 解答を解答用紙(その2)の $\boxed{3}$ 欄に記入せよ.

x の3次関数

$$f(x) = x^3 + 3tx^2 + (4t^2 - 3t)x$$

について，次の問に答えよ．ただし t は定数である．

(1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつような t の値の範囲を求めよ．

(2) t が(1)の範囲にあるとき，極大値と極小値の和を S とする．S を t を用いて表せ．

(3) t が(1)の範囲にあるとき，S の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

〔計 算 用 余 白〕

$\boxed{4}$ 解答を解答用紙(その3)の $\boxed{4}$ 欄に記入せよ.

実数 a について，次の定積分を考える.

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-ax)^2dx$$

(1) 不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) $I(a)$を求めよ.

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，$I(a)$の最小値を求めよ.

〔計算用余白〕

$\boxed{5}$ 解答を解答用紙(その4)の $\boxed{5}$ 欄に記入せよ.

曲線 $y=e^{-x}$ 上の点 $(1, e^{-1})$ における接線と x 軸の交点を $(a_1,\ 0)$ とする. 次に, $y=e^{-x}$ 上の点 (a_1, e^{-a_1}) における接線と x 軸の交点を $(a_2,\ 0)$ とする. 以下, 同様に a_n $(n=3, 4, 5, \cdots)$ を定める. 次の問に答えよ.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_n を求めよ.

(3) 曲線上の点 (a_n, e^{-a_n}) における接線と, 直線 $x=a_n$ および x 軸で囲まれた三角形の面積を S_n とする. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ.

〔計 算 用 余 白〕