2012年度

I　数　学　問　題

注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべてＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシルで記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は8ページまでとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください．なお，出席票は切り離さないでください．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

I．次の空欄ア～サに当てはまる数または式を記入せよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ のとき，x^3+y^3 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(ii) 互いに異なる定数 a，b，c が $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ のとる値は $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$abc \neq 0$ とする．

(iii) 白玉3個と黒玉3個が入っている袋から玉を1個取り出し，色を調べてもとに戻す．この試行を3回繰り返すとき，白玉を2回取り出す確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(iv) 整式 $\mathrm{P}(x)$ を $x-1$ で割った余りが -2，$x-2$ で割った余りが3，$x-3$ で割った余りが8ならば，$\mathrm{P}(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは $\boxed{\text{エ}}$ である．

(v) 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=-7$ と漸化式 $2a_{n+1}=3a_n+8$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) で定められている．この数列の一般項は $a_n=\boxed{\text{オ}}$ である．

(vi) 平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを $2:1$ に内分する点をE，辺BCの中点をF，辺CDの中点をGとする．線分CEと線分FGの交点をHとすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる．

(vii) 関数 $f(x)=x^2-2ax+a+6$ がすべての実数 x に対して $f(x)>0$ を満たすならば，定数 a の値の取りうる範囲は，$\boxed{\text{ク}}<a<\boxed{\text{ケ}}$ となる．

(viii) 関数 $f(x)=ax^2+bx+1$ が $f(1)=-6$ と $\displaystyle\int_0^3 \{f'(x)\}^2 dx=63$ を満たすならば，定数 a，b の値は $a=\boxed{\text{コ}}$，$b=\boxed{\text{サ}}$ である．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す．

Ⅱ. 関数 $f(x)=x^3+x^2-16x+3$ が定める座標平面上の曲線を C とする．この曲線が y 軸と交わる点をPとし，$f(x)$ は $x=a$ において極小値をとるとする．$x=a$ に対応する曲線上の点を $Q(a, f(a))$ とする．このとき，次の問(ｉ)〜(ⅲ)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ｉ) 点Qの座標を求めよ．

(ⅱ) 点Rを $R(0, f(a))$ で定める．△PQRを y 軸を中心にして回転させて得られる円錐Mとそれに内接する円柱Nを考える．円柱Nの底面は，円錐Mの底面に含まれており，半径が r であるとき，この円柱Nの体積 V を r の式で表せ．

(ⅲ) 円柱Nの体積 V が最大となるような r とそのときの体積を求めよ．

Ⅲ. 座標平面上に円 $x^2+y^2=4$ と円上の点P $(1, -\sqrt{3})$, Q $(-1, -\sqrt{3})$ が与えられている. $0<\theta<\pi$ のとき, 円上の点をR $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とし, $\angle \mathrm{QPR}=\alpha$, $\angle \mathrm{PQR}=\beta$ とする. このとき, 次の問(i)〜(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 点 $(2, 0)$ をA, 点 $(-2, 0)$ をBとするとき, 弧PARに対する中心角と弧QBRに対する中心角を θ を用いて表せ.

(ii) α, β を θ を用いて表せ.

(iii) $2\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\beta$ となるときの点Rの座標を求めよ.