2013年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません.
2. 解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています. ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください.
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません.)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています. 試験開始後, ただちにページ数を確認してください. なお, 問題番号はⅠ～Ⅲとなっています.
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので, 出席票の受験番号が, あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し, 出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください. なお, 出席票は切り離さないでください.
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し, その他の部分には何も書いてはいけません.
6. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったり, 傷つけたりしないように注意してください.
7. 計算には, この問題冊子の余白部分を使ってください.
8. この問題冊子は持ち帰ってください.

I．次の空欄ア～ケに当てはまる数または式を記入せよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

（i） 不等式 $x|x+2|<2x$ の解は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（ii） a を実数とする．$\dfrac{3+i}{1+ai}$ の実部と虚部の和が0であるとき，$a=\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，i は虚数単位とする．

（iii） 座標平面上の点（2，1）から円 $x^2+y^2=1$ へ引いた接線の方程式は $y=1$ と $y=\boxed{\text{ウ}}$ である．

（iv） $128^{\frac{1}{6}}$，$8^{\frac{2}{5}}$，$81^{\frac{1}{5}}$ のうち最大のものは $\boxed{\text{エ}}$ である．

（v） $\cos 165^\circ$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

（vi） 平面上に三角形OABと点Pがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{0}$ を満たしている．直線ABと直線OPとの交点をQとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

（vii） 数列 $\{a_k\}$ は $a_1=0$ と漸化式 $a_{k+1}=2a_k+1$（$k=1,2,3,\cdots$）で定められている．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_8(1+a_k)=\boxed{\text{ク}}$ である．

（viii） 数字の1が書かれたカードが1枚，数字の2が書かれたカードが2枚，数字の3が書かれたカードが3枚ある．この6枚のカード全部を1列に並べるとき，数字の2が書かれたカードが連続して並ぶ確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

Ⅲ. 座標平面上に点A$(2,0)$，点B$(0,2)$があり，点P(x,y)は$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$を満たしている．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅲ)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ⅰ) 点Pの軌跡の方程式を求めよ．

(ⅱ) 線分PAの長さが$\sqrt{2}$となるとき，点Pの座標を求めよ．

(ⅲ) 線分ABの中点をMとする．点P(x,y)について$x>0$，$y=1$であるとき，$\angle$AMPを求めよ．

II. 関数 $F(x)$ を次のように定める．

$$F(x)=\begin{cases} x^2 & (x \leqq 1) \\ -x^2+2x & (x>1) \end{cases}.$$

実数 k が $0<k<1$ を満たすとき，次の問(ⅰ)〜(ⅳ)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ⅰ) 直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ の交点のうち，原点とは異なるものをすべて求めよ．

(ⅱ) 直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ で囲まれた2つの部分のうち，直線 $y=kx$ の下側にある部分の面積 S_1 を k を用いて表せ．

(ⅲ) 直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ で囲まれた2つの部分のうち，直線 $y=kx$ の上側にある部分の面積 S_2 を k を用いて表せ．

(ⅳ) (ⅱ)で求めた S_1 と(ⅲ)で求めた S_2 の和 $S=S_1+S_2$ が最小となるときの k の値を求めよ．

【以下余白】