

2019年度

B_b 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $n = 2019$ とするとき、 $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ を 7 で割った余りは である。

(ii) a を実数とする。2つの集合

$$A = \{1, a^2 - 5a + 6, a^3 - 3a^2 + 3a - 1\}, B = \{1, a^2 - 6a + 8, a^3 - 6a^2 + 9a\}$$

が、 $0 \in A \cap B$ かつ $-1 \in A \cup B$ をみたすとき、 $a =$ である。また、このとき、集合 $X = \{x \mid x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin A \cap B\}$ の要素をすべて求めると である。

(iii) i を虚数単位とする。条件「 $|z + 1| = 1$ かつ $|z - 1 - 2i| = \sqrt{5}$ かつ $z \neq 0$ 」をみたす複素数 z は、 $z =$ である。

(iv) 下図のように 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある。



この中から 1 枚のカードを引く操作を 3 回繰り返す。ただし、各操作において、引いたカードは元に戻さないものとする。引いた順に 3 枚のカードを左から右に並べて作られる 3 桁の整数を a とする。このとき、 a が 3 で割り切れる確率は であり、また、5 で割り切れる確率は である。

(v) 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1}$ の値は である。

II. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. さらに, $\{a_n\}$ の奇数番目の項のみからなる数列を $\{b_n\}$, 偶数番目の項のみからなる数列を $\{c_n\}$ とする. つまり, $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ. (i)の解答欄には答えのみを書き, (ii)~(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) b_1, b_2, b_3 の値をそれぞれ求めよ.

(ii) $\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(iii) $\{c_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(iv) $d_n = a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, 数列 $\{d_n\}$ は等比数列になる. 初項と公比をそれぞれ求めよ.

(v) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{4n}}{2^{4n}}$ の値を求めよ.

Ⅲ. 関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (x > 0)$$

座標平面上に、曲線 $C: y = f(x) (x > 0)$ がある. また、 $t > 0$ として C 上の点 $P(t, f(t))$ における C の接線を l とする. このとき、次の問(i)~(v)に答えよ.

(i)の解答欄には答えのみを書き、(ii)~(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) l の方程式を求めよ.

(ii) C の変曲点の座標をすべて求めよ.

(iii) 直線 $x = 1$ と l との交点を Q とし、 Q の y 座標を $g(t)$ とおく. t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 $g(t)$ の極大値と極小値のそれぞれをすべて求めよ.

(iv) a を正の数とする. 点 $A(1, a)$ を通る C の接線がちょうど2つあるとき、 a の値を求めよ.

(v) (iv)のとき、 A を通る C の2つの接線のうち傾きが負である方を m とおく. 直線 $x = 1$, m , C で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

【以下余白】

