2014年度

# Aa 数 学 問 題

## 注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください．あなたの氏名を記入する必要はありません．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

Ⅰ. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 1でない実数 $a$ に対し, $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + a$ とする. 方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ がただ1つの共通解をもつならば, $a = \boxed{\text{ア}}$ であり, $f(x) = 0$ のすべての解は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(ii) $x > 0$ のとき, $f(x) = e^{-\sqrt{3}x} \sin x$ の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり, 最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(iii) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ とするとき, $z^{2014} = \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\, i$ である. ただし, $i$ は虚数単位とする.

(iv) $a$, $b$ を2から9までの自然数とするとき, $a$, $b$ の組 $(a, b)$ は64通りあるが, そのうち $\log_a b$ が整数となるのは $\boxed{\text{キ}}$ 通りであり, 整数でない有理数となるのは $\boxed{\text{ク}}$ 通りである.

(v) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ かつ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{3}$ を満たす. このとき, ベクトル $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ が $\vec{a} \cdot \vec{c} = \dfrac{5}{3}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$ を満たすならば, $p = \boxed{\text{ケ}}$, $q = \boxed{\text{コ}}$ である. ただし, $p$, $q$ は実数とする.

Ⅱ. $k$ を実数とし，座標平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = k\cos x,\ C_2 : y = \sin 2x$$

を考える．このとき，次の問(ⅰ)に答えよ．

(ⅰ) $C_1$，$C_2$ が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において共有点をもつとき，$k$ の取りうる値の範囲を求めよ．

以下では $k$ が(ⅰ)の条件を満たすものとし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における $C_1$，$C_2$ の共有点の $x$ 座標を $a$ とおく．このとき，次の問(ⅱ)～(ⅴ)に答えよ．

(ⅱ) $\sin a$ を $k$ を用いて表せ．

(ⅲ) 座標平面上の $0 \leqq x \leqq a$ の部分において，$C_1$，$C_2$ および $y$ 軸によって囲まれる図形の面積を $S_1$ とする．$S_1$ を $k$ を用いて表せ．

(ⅳ) 座標平面上の $a \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分において，$C_1$，$C_2$ によって囲まれる図形の面積を $S_2$ とする．$S_2$ を $k$ を用いて表せ．

(ⅴ) $k$ が(ⅰ)で求めた範囲を動くとき，$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ．

**Ⅲ.** 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ に対して，次の関係式が成り立っているものとする．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問( i )～( v )に答えよ．

( i ) $a_n$, $c_n$ を $n$, $a_1$, $c_1$ を用いて表せ．

( ii ) $b_{n+1}$ を $n$, $a_1$, $b_n$ を用いて表せ．

( iii ) $d_n = \dfrac{b_n}{3^n}$ として数列 $\{d_n\}$ を定める．数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を求めよ．

( iv ) $d_n$ を $n$, $a_1$, $b_1$ を用いて表せ．

( v ) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n$ を $n$ を用いて表せ．

Ⅳ．$a$ を正の実数とする．座標平面上に4点O(0，0)，A($a$，0)，B($a$，$a$)，C(0，$a$) がある．四角形OABCの辺AB上に点P($a$，$p$) をとり，点Pを通りACと平行な直線とBCとの交点をQとする．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅴ)に答えよ．

(ⅰ) 三角形OPQの面積 $S$ を $a$ と $p$ を用いて表せ．

(ⅱ) 三角形OPQの外接円の半径 $R$ を $a$ と $p$ を用いて表せ．

(ⅲ) 三角形OAPと三角形PBQの面積がともに1であるとき，$a-p$ と $a+p$ の値を求めよ．

(ⅳ) (ⅲ)のとき，$a$ と $p$ の値を求めよ．

(ⅴ) $a$ と $p$ が(ⅳ)で求めた値であるとき，三角形OPQの内接円の半径 $r$ の値を求めよ．

【以下余白】