2017年度

Ma 数　学　問　題

注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください．あなたの氏名を記入する必要はありません．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

Ⅰ．下記の空欄ア～ケにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

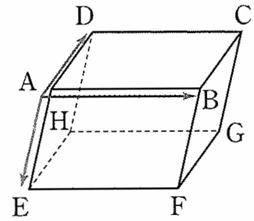
（ｉ）10 進法で表された 2 桁の自然数 A を 4 進法で表すと，数字の並び方が反対の順になった．このとき A を 10 進法で表すと，$A=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

（ⅱ）$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<0$ とする．$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{5}$ であるとき，$\cos 2\theta=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

（ⅲ）平行六面体ABCD－EFGHにおいて辺BCの中点をP，辺GHの中点をQとする．線分PQの中点をRとするとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\boxed{\text{ウ}}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{エ}}\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}+\boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}$

である．

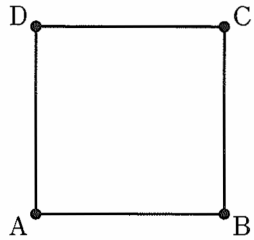


（ⅳ）a，b は実数とする．整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $x-1$ であるならば，$a=$ $\boxed{\text{カ}}$　$b=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

（ｖ）複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，$\left|z^3-\dfrac{1}{z^3}\right|$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である．また，最大値をとるときの z のうち，$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものの偏角は，$\arg z=$ $\boxed{\text{ケ}}$ である．

II．p を $0<p<\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする．図のように表された四辺形ABCDの頂点上を点Pが次の規則で移動する．

- 初期時刻 $t=0$ で点Pは頂点A上にある．
- 点Pは1秒ごとに，点Pと辺で結ばれている頂点の一方に確率 p で移動し，点Pと辺で結ばれていない頂点に確率 $1-2p$ で移動する．



0以上の整数 t に対し，t 秒後に点Pが頂点A，B，C，D上にある確率をそれぞれ $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$ で表す．たとえば $A(1)=0$，$B(1)=p$，$C(1)=1-2p$，$D(1)=p$ である．このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) $B(t+1)$ を $A(t)$，$C(t)$，$D(t)$ および p を用いて表せ．また，$D(t+1)$ を $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ および p を用いて表せ．

(ⅱ) $B(t+1)-D(t+1)$ を $B(t)$，$D(t)$ および p を用いて表せ．

(ⅲ) $A(t)+B(t)+C(t)+D(t)$ と $B(t)-D(t)$ の値をそれぞれ求めよ．

(ⅳ) $B(t+1)$ を $B(t)$ と p を用いて表せ．

(ⅴ) $p=\dfrac{1}{3}$ であるとき，$B(t)$ を t を用いて表せ．

Ⅲ. 関数

$$f(x)=\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

について，次の問(ⅰ)〜(ⅴ)に答えよ．ただし，(ⅰ)〜(ⅲ)において $t=e^{x}+e^{-x}$ とおく．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ．

(ⅱ) 導関数 $f'(x)$ を t を用いて表せ．

(ⅲ) $f(x)$ が $x>0$ において最大値をとるとき，t の値を求めよ．

(ⅳ) a を正の実数とする．$S(a)=\int_0^a f(x)\,dx$ を a を用いて表せ．

(ⅴ) $\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ．

Ⅳ. a を実数とする．関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=1-x+x^2+a[x]-2x[x]+[x]^2$$

ただし，実数 x に対し，記号 $[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を表す．たとえば $[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$ である．このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) $0 \leqq x < 1$ の範囲において，$f(x)$ を x の整式で表せ．

(ⅱ) $1 \leqq x < 2$ の範囲において，$f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ．

(ⅲ) $f(x)$ が $x=1$ で連続であるように，a の値を定めよ．

(ⅳ) $f(x+1)-f(x)$ を a を用いて表せ．ただし，$[x+1]=[x]+1$ であることは証明せずに用いてよい．

(ⅴ) a を(ⅲ)で定めた値とする．n を正の整数とするとき，$\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$ を n を用いて表せ．

【以下余白】