2020年度

Ka 数 学 問 題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キには，あてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入し，また，空欄ク，ケには(v)にある選択肢1～4の中から最も適切な番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) t を実数とする。平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ をみたすとき，$|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|$ は $t=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる。

(ii) 三角形ABCにおいて，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき，$\sin C=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) 等比数列 $\{a_n\}$ について，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=3$，$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=2$ が成り立つとする。このとき，$\{a_n\}$ の公比は $\boxed{\text{エ}}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(iv) 方程式 $37x+15y=1$ の整数解 x, y について，x を15で割った余りは $\boxed{\text{カ}}$ であり，y を37で割った余りは $\boxed{\text{キ}}$ である。

(v) a を正の実数とし，x, y を実数とする。x, y に関する条件 A, B を次で定める。

$$A : |x|+|y| \leqq a$$
$$B : |x| \leqq 1 \text{ かつ } |y| \leqq 1$$

$a=1$ のとき，A は B であるための $\boxed{\text{ク}}$。$a=2$ のとき，A は B であるための $\boxed{\text{ケ}}$。

1．必要条件であるが，十分条件でない
2．十分条件であるが，必要条件でない
3．必要十分条件である
4．必要条件でも十分条件でもない

Ⅱ． Oを原点とする座標平面上を移動する点Pがある。はじめにPはOにあり，１枚の硬貨を投げるたびに次のルールにしたがってPが移動する。ただし，硬貨を投げたときに表が出る確率と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする。

> [ルール]：
> - 硬貨を投げて表が出たら x 軸の正の方向に１移動する。
> - 硬貨を投げて裏が出たら y 軸の正の方向に１移動する。

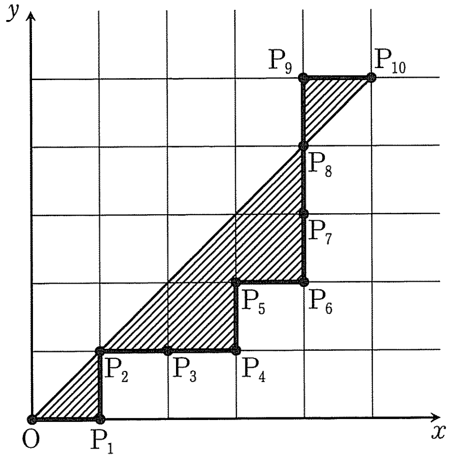
n を自然数とする。硬貨を n 回投げた後のPの位置を P_n とする。また，P_n が直線 $y=x$ 上にある確率を q_n とする。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅵ)に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に**答えのみを記入すること。**

(ⅰ) q_1，q_2，q_3，q_4 を求めよ。

(ⅱ) q_{2n-1} を求めよ。

(ⅲ) q_{2n} を n を用いて表せ。

(ⅳ) P_{2n} が直線 $y=x$ 上にあるとする。O，P_1，P_2，$\cdots$，P_{2n} を順に結んでできる折れ線と，直線 $y=x$ とで囲まれた図形の面積を S_{2n} とする。S_{2n} は P_1，$\cdots$，P_{2n-1} の位置によって定まる。例えば $n=5$ で，点Pが下図のように移動した場合，囲まれた図形とは図の斜線部分である。
このとき，S_{2n} の取り得る値の最大値 M と最小値 m をそれぞれ n を用いて表せ。



(ⅴ) M を(ⅳ)で求めた最大値とする。P_{2n} が直線 $y=x$ 上にあり，かつ $S_{2n}=M$ である確率を n を用いて表せ。

(ⅵ) m を(ⅳ)で求めた最小値とする。P_{2n} が直線 $y=x$ 上にあり，かつ $S_{2n}=m$ である確率を n を用いて表せ。

Ⅲ. 関数

$$f(x)=\frac{2(\log x)^2+5\log x+2}{x}\quad(x>0)$$

について，次の問(ⅰ)～(ⅵ)に答えよ。解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) $f(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(ⅱ) $f'(x)$ を求めよ。

(ⅲ) $f'(x)\geqq 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

(ⅳ) $f(x)$ の極大値と極小値をそれぞれ求めよ。

(ⅴ) (ⅲ)で求めた x の値の範囲において，$f(x)=0$ となる x の値を a とおく。また，$f(x)$ が極大値をとる x の値を b とおく。このとき，a と b の値を求め，

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

の値を求めよ。

(ⅵ) $f(x)$ の極大値を B とおく。また，$f(x)$ の定義域を(ⅲ)で求めた範囲に制限した関数を考え，その逆関数を $g(x)$ とする。このとき，

$$\int_0^B g(x)\,dx$$

の値を求めよ。

Ⅳ. z を 0 でも 1 でもない複素数とし，i を虚数単位とする。O を原点とする複素数平面上の 4 点 A(z)，B(z^2)，C(z^3)，D(iz^2) について，次の問(i)〜(v)に答えよ。解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) AB = BC となるための，z についての必要十分条件を求めよ。さらに，その条件を満たす点 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ。

(ii) AB = AC となるための，z についての必要十分条件を求めよ。さらに，その条件を満たす点 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ。

(iii) 3 点A，B，C を頂点とする三角形が正三角形であるような，z の値をすべて求めよ。

(iv) z を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で表す。ただし，$r > 0$ かつ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，三角形OABの面積 S および，三角形OADの面積 T をそれぞれ r と θ を用いて表せ。

(v) (iv)で求めた S と T について，$S = T$ となる θ の値を求めよ。

【以下余白】