2019年度

# Ba 数 学 問 題

## 注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません.
2. 解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています. ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください.（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません.）
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています. 試験開始後, ただちにページ数を確認してください. なお, 問題番号はⅠ～Ⅳとなっています.
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので, あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください. あなたの氏名を記入する必要はありません.
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し, その他の部分には何も書いてはいけません.
6. 解答用紙を破ったり, 傷つけたりしないように注意してください.
7. 計算には, この問題冊子の余白部分を使ってください.
8. この問題冊子は持ち帰ってください.

I．下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

（i） $n = 2019$ とするとき，$4n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ア}}$ である.

（ii） $a$ を実数とする. 2つの集合

$$A = \{1,\ a^2 - 5a + 6,\ a^3 - 3a^2 + 3a - 1\},\ B = \{1,\ a^2 - 6a + 8,\ a^3 - 6a^2 + 9a\}$$

が，$0 \in A \cap B$ かつ $-1 \in A \cup B$ をみたすとき，$a = \boxed{\text{イ}}$ である. また，このとき，集合 $X = \{x \mid x \in A \cup B$ かつ $x \notin A \cap B\}$ の要素をすべて求めると $\boxed{\text{ウ}}$ である.

（iii） $i$ を虚数単位とする. 条件「$|z + 1| = 1$ かつ $|z - 1 - 2i| = \sqrt{5}$ かつ $z \neq 0$」をみたす複素数 $z$ は，$z = \boxed{\text{エ}}$ である.

（iv） 下図のように 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

この中から 1 枚のカードを引く操作を 3 回繰り返す. ただし，各操作において，引いたカードは元に戻さないものとする. 引いた順に 3 枚のカードを左から右に並べて作られる 3 桁の整数を $a$ とする. このとき，$a$ が 3 で割り切れる確率は $\boxed{\text{オ}}$ であり，また，5 で割り切れる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である.

（v） 極限 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1}$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である.

Ⅱ. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

また, $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする. さらに, $\{a_n\}$ の奇数番目の項のみからなる数列を $\{b_n\}$, 偶数番目の項のみからなる数列を $\{c_n\}$ とする. つまり, $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とする. このとき, 次の問(i)〜(v)に答えよ. (i)の解答欄には答えのみを書き, (ii)〜(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $b_1$, $b_2$, $b_3$ の値をそれぞれ求めよ.

(ii) $\{b_n\}$ の一般項を $n$ を用いて表せ.

(iii) $\{c_n\}$ の一般項を $n$ を用いて表せ.

(iv) $d_n = a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とおくと, 数列 $\{d_n\}$ は等比数列になる. 初項と公比をそれぞれ求めよ.

(v) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{4n}}{2^{4n}}$ の値を求めよ.

**III.** 関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2}\quad (x>0)$$

座標平面上に，曲線 $C: y=f(x)(x>0)$ がある．また，$t>0$ として $C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における $C$ の接線を $l$ とする．このとき，次の問(i)～(v)に答えよ．(i)の解答欄には答えのみを書き，(ii)～(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと．

(i)　$l$ の方程式を求めよ．

(ii)　$C$ の変曲点の座標をすべて求めよ．

(iii)　直線 $x=1$ と $l$ との交点をQとし，Qの $y$ 座標を $g(t)$ とおく．$t$ が $t>0$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の極大値と極小値のそれぞれをすべて求めよ．

(iv)　$a$ を正の数とする．点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ を通る $C$ の接線がちょうど2つあるとき，$a$ の値を求めよ．

(v)　(iv)のとき，Aを通る $C$ の2つの接線のうち傾きが負である方を $m$ とおく．直線 $x=1$，$m$，$C$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

Ⅳ. 座標平面上にO(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) を頂点とする正方形と点P($a$, $b$) がある. ただし, $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする. さらに, A, Pはある直線に関して対称であり, その直線を $l$ とする. このとき正方形OABCは, $l$ により2つの領域に分割される. これら2つの領域のうちAを含む方を $X$ とする. ただし, $X$ は境界線を含む. このとき, 次の問(i)〜(vi)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $X$ が直角二等辺三角形となるための $a$ と $b$ についての必要十分条件を求めよ.

(ii) $l$ の方程式を $y = mx + n$ とするとき, $m$, $n$ を $a$, $b$ を用いてそれぞれ表せ.

(iii) $l$ と辺OAが交わるための $a$ と $b$ についての必要十分条件を求めよ.

(iv) $l$ と辺ABが交わるための $a$ と $b$ についての必要十分条件を求めよ.

(v) $X$ が三角形となるための $a$ と $b$ についての必要十分条件を求めよ.

(vi) $X$ が三角形となるようにPが動くとき, Pの動く領域にAとCを加えた領域の面積 $S$ を求めよ.

【以下余白】