2018年度

Na 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません.
2. 解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています. ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください.
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません.)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています. 試験開始後, ただちにページ数を確認してください. なお, 問題番号はⅠ～Ⅳとなっています.
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので, あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください. あなたの氏名を記入する必要はありません.
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し, その他の部分には何も書いてはいけません.
6. 解答用紙を破ったり, 傷つけたりしないように注意してください.
7. 計算には, この問題冊子の余白部分を使ってください.
8. この問題冊子は持ち帰ってください.

Ⅰ．下記の空欄ア～ケにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ⅰ) a，b を定数とし，$a \neq 0$ であるとするとき，関数 $f(x) = ax^3 + b$ が，すべての実数 x に対して

$$\{f'(x)\}^2 + xf(x) + x = 0$$

を満たすとする．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．このとき，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$ である．

(ⅱ) 3つの空間ベクトル $\vec{a} = (t,\ t+1\ ,\ 2)$，$\vec{b} = (2\ ,\ t,\ t+3)$，$\vec{c} = (0\ ,\ -1\ ,\ t)$ について，$\vec{a} \perp \vec{b}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{c}$ が成り立つのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである．

(ⅲ) 初項が0でなく，公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 - 4a_3 = 1$$
$$a_1 - 6a_2 + 9a_3 = 0$$

をともに満たすとする．このとき $r = \boxed{\text{エ}}$ ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{オ}}$ である．

(ⅳ) 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝3，BC＝6，CD＝4，DA＝3 であるとする．このとき，$\angle \mathrm{ABC} = \theta$ とすれば，$\cos\theta = \boxed{\text{カ}}$ であり，AC＝$\boxed{\text{キ}}$ である．

(ⅴ) i を虚数単位とする．複素数 $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\left(1 + \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ を極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表すと，$r = \boxed{\text{ク}}$ ，$\theta = \boxed{\text{ケ}}$ である．ただし $r > 0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

II. $0 \leqq p \leqq 1$ とする．さいころが２つ入った箱があり，その箱を１回振ると確率 p でさいころが１つ，確率 $1-p$ でさいころが２つ出るとする．箱を１回振り，出たさいころが１つのときはその目を得点とし，出たさいころが２つのときは出た目の合計を得点とするゲームを行う．箱を１回振ったとき，$1 \leqq k \leqq 12$ を満たす整数 k に対し，得点が k である確率を $Q(k)$ とする．この $Q(k)$ について，次の問(ｉ)～(ｖ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ｉ)　$Q(1)$ を p を用いて表せ．

(ⅱ)　$Q(12)$ を p を用いて表せ．

(ⅲ)　$1 \leqq k \leqq 6$ のとき，$Q(k)$ を p と k を用いて表せ．

(ⅳ)　$7 \leqq k \leqq 12$ のとき，$Q(k)$ を p と k を用いて表せ．

(ｖ)　$Q(6)=Q(7)$ となる p を求めよ．

Ⅲ. $a>0$ とするとき，関数

$$f(x)=\log x+\frac{a}{x}-2\log 2 \quad (x>0)$$

について，次の問(ⅰ)～(ⅳ)に答えよ．ただし，$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ であることを用いてもよい．(ⅰ)の解答欄には答えのみを書き，(ⅱ)～(ⅳ)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と不定積分 $F(x)$ をそれぞれ求めよ．

(ⅱ) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

(ⅲ) $f(x)=0$ が異なる2つの実数解 t, $\frac{t}{2}$ を持つとする．このとき，t の値と a の値をそれぞれ求めよ．

(ⅳ) (ⅲ)のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする．

$$S=A+B\log 2+C(\log 2)^2$$

となる整数 A, B, C を求めよ．

Ⅳ. $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする. 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = b^n + c^n$$

で与えられるとき, 次の問(ⅰ)～(ⅵ)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(ⅰ) a_1, a_2 を求めよ.

(ⅱ) $a_{n+2} - a_{n+1}$ を a_n を用いて表せ.

(ⅲ) (ⅱ)で得られた結果を用いて a_5 を求めよ.

(ⅳ) 自然数 n に対して $\sin(2\pi a_n)$, $\cos(2\pi a_n)$ を求めよ.

(ⅴ) 極限 $S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n}$ を求めよ.

(ⅵ) 極限 $T = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n}$ を求めよ.

【以下余白】