2016年度

Aa 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません.
2. 解答用紙はすべてＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシルで記入することになっています. ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください.
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません.)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています. 試験開始後, ただちにページ数を確認してください. なお, 問題番号はⅠ～Ⅳとなっています.
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので, あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください. あなたの氏名を記入する必要はありません.
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し, その他の部分には何も書いてはいけません.
6. 解答用紙を破ったり, 傷つけたりしないように注意してください.
7. 計算には, この問題冊子の余白部分を使ってください.
8. この問題冊子は持ち帰ってください.

I. 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) x, y を実数とするとき, 座標平面上の点P$(3\sin x + 5\sin y,\ 3\cos x + 5\cos y)$ と原点との距離の最小値は $\boxed{\ ア\ }$ であり, 最大値は $\boxed{\ イ\ }$ である.

(ii) $2016x + 401y = 1$ を満たす整数 x, y で $0 < x < 401$ となるのは, $x = \boxed{\ ウ\ }$, $y = \boxed{\ エ\ }$ のときである.

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき, 関数 $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$ は, $x = \boxed{\ オ\ }$ において最大値 $\boxed{\ カ\ }$ をとる.

(iv) Oを原点とする座標空間内の2点A$(4,\ -1,\ 3)$, B$(2,\ 1,\ 1)$ を通る直線と xy 平面の交点をCとするとき, Cの座標は $\boxed{\ キ\ }$ である. また, 直線ABと直線OCのなす角を θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると, $\cos\theta = \boxed{\ ク\ }$ である.

(v) 袋の中に赤玉と白玉が合わせて8個入っている. この袋の中から2個の玉を同時に取り出すとき, 取り出した玉が両方とも白である確率が $\dfrac{5}{14}$ である. このとき, 袋の中の白玉は $\boxed{\ ケ\ }$ 個である. また, 取り出した玉を元に戻し, この袋からあらたに2個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉と白玉が1個ずつである確率は $\boxed{\ コ\ }$ である.

Ⅱ. a, b を実数，t を正の実数とする．Oを原点とする座標平面上の２つの放物線

$$C_1: y = -x^2,\ C_2: y = x^2 + ax + b$$

が，点P$(t, -t^2)$ において同じ接線 l を持つとする．また，点Pにおける C_1 の法線を m とする．このとき，次の問(ⅰ)～(ⅳ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) l と m の方程式をそれぞれ t を用いて表せ．

(ⅱ) a, b をそれぞれ t を用いて表せ．

(ⅲ) m と C_2 の軸および C_2 で囲まれる図形の面積 S_1 を t を用いて表せ．

(ⅳ) l と y 軸の交点をQとし，三角形OPQの面積を S_2 とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ．

Ⅲ. 次の条件を満たす実数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1\ ,\ b_1 = 0\ ,\ \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また, i を虚数単位とし, 複素数 z_n を $z_n = a_n + b_n i$ とする. このとき, 次の問(i)〜(v)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) $z_{n+1} = \alpha z_n$ となる複素数 α を求めよ.

(ii) (i)で求めた複素数 α を極形式で $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すとき, r と θ を求めよ. ただし, $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

(iii) $n \geqq 1$ に対して, z_n を極形式で $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と表すとき, r_n と θ_n を n を用いて表せ. ただし, $\theta_n \geqq 0$ とする.

(iv) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ を求めよ.

(v) N を自然数とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{4N} a_n$ を N を用いて表せ.

Ⅳ. c を $0 < c < 1$ を満たす実数とする．関数

$$F(x) = \int_0^x (t - c)\log\left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)dt$$

について，次の問(ⅰ)〜(ⅳ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ．

(ⅱ) $F'(x) < 0$ となる x の値の範囲を c を用いて表せ．

(ⅲ) $F(x)$ が極大値をとる x の値と極小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(ⅳ) $c = \dfrac{1}{2}$ のとき，$x \geqq 0$ の範囲における $F(x)$ の最小値を求めよ．

【以下余白】