2013年度

Ua 数 学 問 題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

Ⅰ．下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする．行列 $A=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & q\end{pmatrix}$ が $2A^2-3A+E=O$ を満たすとき，$p=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$q=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(ii) 三角形ABCの3辺の長さがそれぞれ AB＝3，BC＝7，CA＝8 であるとき，∠BAC＝ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，三角形ABCに外接する円の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(iii) 数列 1，$1+2+3$，$1+2+3+4+5$，$1+2+3+4+5+6+7$，… の初項から第 n 項までの和を n を用いて表すと $\boxed{\text{オ}}$ となる．

(iv) 1001から2000までの整数の中に3の倍数は $\boxed{\text{カ}}$ 個あり，5の倍数は $\boxed{\text{キ}}$ 個ある．また，3の倍数でも5の倍数でもないものは $\boxed{\text{ク}}$ 個ある．

(v) 関数 $f(x)=3^{x+2}-9^x+1$ の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，最大値をとるときの x の値は $\boxed{\text{コ}}$ である．

II．a を正の定数とする．座標平面上の２つの放物線 $y = -x^2 + 3x + 2$ と $y = ax^2 - x + a + 1$ について，次の問(ｉ)～(iii)に答えよ．

(ｉ)　２つの放物線が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ．

(ii)　２つの放物線がちょうど２個の共有点をもつとき，それら２点の x 座標の差が２となるような a の値を求めよ．

(iii)　(ii)で求めた a の値に対して，２つの放物線で囲まれた部分を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ．

Ⅲ．関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\sqrt{3}\cos x}$ について，次の問(ⅰ)〜(ⅲ)に答えよ．

(ⅰ) $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(ⅱ) $0 < x < \pi$ における曲線 $y=f(x)$ の変曲点の y 座標を求めよ．

(ⅲ) 曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

Ⅳ. 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|=1$$

を満たすとする．また，$\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ とする．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅳ)に答えよ．

(ⅰ) $|\vec{a}|$ を t とおくとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を t を用いて表せ．

(ⅱ) $|\vec{a}-\vec{d}|$ を t を用いて表せ．

(ⅲ) $|\vec{a}-\vec{d}|=|\vec{b}-\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{d}|=1$ となるような t の値を求めよ．

(ⅳ) (ⅲ)で求めた t の値に対して，ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直となるような実数 x, y の値を求めよ．

【以下余白】