2011年度

D　数　学　問　題

注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3．この問題冊子は**8ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください．なお，出席票は切り離さないでください．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

Ⅰ. 次の空欄ア～ソに当てはまる数または式を記入せよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) x が $0 < x < 1$ と $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 3$ を満たすとき，x^3 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(ii) 不等式 $\log_5\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + \log_5(x-4) < 2$ の解は $\boxed{\text{イ}} < x < \boxed{\text{ウ}}$ である．

(iii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta > 1$ $(-\pi < \theta < \pi)$ を満たす θ の範囲は，

$\boxed{\text{エ}} < \theta < \boxed{\text{オ}}$ である．

(iv) 3次方程式 $x^3 + 3x^2 - 24x - a = 0$ が，異なる3つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は，$\boxed{\text{カ}} < a < \boxed{\text{キ}}$ である．

(v) 積分 $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x^2 - 1|\,dx$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(vi) 2次不等式 $ax^2 - 4x + b < 0$ の解が $-3 < x < 5$ であるとき，定数 a は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，定数 b は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(vii) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -1, 1)$ と $\vec{b} = (x-2, -x, 4)$ のなす角が 30° のとき，x の値は $\boxed{\text{サ}}$ である．

(viii) 点 (x, y) が直線 $2x + 3y = 4$ の上を動くとする．$4^x + 8^y$ が最小値をとるとき，x，y の値は $x = \boxed{\text{シ}}$，$y = \boxed{\text{ス}}$ である．

(ix) 三角形ABCのAにおける角度は 45°，Cにおける角度は 75°，辺ACの長さが6であるとき，辺BCの長さは $\boxed{\text{セ}}$ である．

(x) 0，1，2，3の数字から選んで4桁の自然数を作るとき，同じ数字を何回用いてもよいとすると，2の倍数でない自然数は $\boxed{\text{ソ}}$ 個できる．

Ⅱ． a，b は $a \neq b$ を満たす定数とする．座標平面上に放物線 C_1 が $y = x^2 + ax + b$ で与えられ，放物線 C_2 が $y = x^2 + bx + a$ で与えられている．C_1 上の点P$(0, b)$ での C_1 の接線は，C_2 上の点Qで C_2 に接しているとする．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅴ)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ⅰ) a と b の間に成り立つ関係式を求めよ．

(ⅱ) 点Qの座標を a を用いて表せ．

(ⅲ) C_1 と C_2 の交点Rの座標を a を用いて表せ．

(ⅳ) 放物線 C_1，C_2 と線分PQで囲まれる図形の面積Aを求めよ．

(ⅴ) 線分PQ上に点Sを三角形PRSの面積が(ⅳ)で求めた面積Aと一致するようにとる．Sの x 座標を求めよ．

Ⅲ. 数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1 = 0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = -a_n + \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

が成り立つ．このとき，次の問(ⅰ)～(ⅳ)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ⅰ) a_3，a_4 を求めよ．

(ⅱ) c を定数として $b_n = (-1)^n(a_n + c)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには c をどのように定めればよいか．c の値を求めよ．

(ⅲ) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(ⅳ) 数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの2乗の和 $S_{2n} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_{2n}}^2$ を求めよ．

【以下余白】