2011年度

Ⅰ 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2. 解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．）
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています．
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください．なお，出席票は切り離さないでください．
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6. 解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7. 計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8. この問題冊子は持ち帰ってください．

I．次の空欄ア～サに当てはまる数または式を記入せよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) 2つの異なる2次方程式 $x^2+3px+4=0$，$x^2+3x+4p=0$ が共通の実数解を持つとき，p の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．ただし，$p \neq 1$ とする．

(ii) 三角形ABCにおいて，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CA}=4$，$\cos\mathrm{C}=\dfrac{1}{3}$ であるとき，$\sin\mathrm{A}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(iii) 不等式 $|2x|+|x-4|<6$ を解くと，$\boxed{\text{ウ}}$ となる．

(iv) 実数 x, y が $(3+2i)x+(1-i)y+13+2i=0$ を満たすとき，$x=\boxed{\text{エ}}$，$y=\boxed{\text{オ}}$ である．ただし，i は虚数単位とする．

(v) 点Qが円 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点P(3，0) と点Qの中点の軌跡の方程式は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(vi) $\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\tan\theta=\boxed{\text{キ}}$ である．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(vii) $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$ とするとき，$\log_{100}\dfrac{125}{9}$ を a, b を用いて表すと，$\boxed{\text{ク}}$ となる．

(viii) 等式 $f(x)=x^2+4x-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ は，$\boxed{\text{ケ}}$ である．

(ix) 数列 2，4，9，17，28，42，… の第 n 項を n を用いて表すと，$\boxed{\text{コ}}$ となる．

(x) 座標空間上に3つの点，A(1，3，−1)，B(−1，2，2)，C(2，0，1) をとるとき，三角形ABCの重心の座標は $\boxed{\text{サ}}$ である．

Ⅱ．袋に赤玉が１個，白玉が２個の合計３個の玉が入っている．袋から玉１個を取り出し，玉の色を確認し，また袋に戻す，という作業を２回行い，これを１回の試行と考える．この試行を使って，Ａ君とＢ君の２人が以下のようなゲームをすることにした．

- 取り出した玉の色の１番目が白，２番目が赤であれば，Ａ君が勝ち抜けとなり，
- 取り出した玉の色の１番目が赤，２番目が白であれば，Ｂ君が勝ち抜けとなり，
- 取り出した玉の色が２回とも同じ色であれば，引き分けとし，試行を続ける．

また，どちらか１人が勝ち抜けた後も，同様に玉を２回出し入れする試行を続け，以下の場合にゲームを終了させることにした．

- 残った１人がＡ君のとき，取り出した玉の色の１番目が白，２番目が赤である場合．
- 残った１人がＢ君のとき，取り出した玉の色の１番目が赤，２番目が白である場合．

このとき，次の問(ｉ)～(iii)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ｉ)　１回目の試行で，Ａ君が勝ち抜ける確率，Ｂ君が勝ち抜ける確率，引き分けになる確率をそれぞれ求めよ．

(ii)　３回目の試行でゲームが終了する確率を求めよ．

(iii)　Ａ君のほうが早く勝ち抜けし，その後，n 回目の試行でＢ君がゲームを終了させる確率を n を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とし，n にはＡ君が勝ち抜けるまでの試行の回数も含むものとする．

Ⅲ．放物線 $y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ をAとし，点Aにおける放物線の接線を l とする．ただし，$a > 0$ とする．また，x 軸上の点 $(a,\ 0)$ の直線 l について対称な点をBとし，点A，Bを通る直線を m とする．このとき，次の問(ｉ)～(iv)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ｉ) 直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を θ とし，また，直線 m と x 軸の正の向きとのなす角を γ とする．γ を θ と π を用いて表せ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(ⅱ) 直線 m の傾き $\tan\gamma$ を $\tan\theta$ で表せ．

(ⅲ) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(iv) 直線 m が，a の値によらず，必ず通過する点の座標を求めよ．

【以下余白】