2019年度

Y　数　学　問　題

注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべてＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシルで記入することになっています。ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）
3．この問題冊子は**8ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお，出席票は切り離さないでください。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ. 次の空欄ア～セに当てはまる数または式を記入せよ。

(i) 座標空間に原点O，点A(1，1，1)，点B(1，2，−1)がある。さらに $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ を満たす点Cがある。線分ABを 3：1 に内分する点をPとし，直線OPと直線BCの交点をQとすると，$\dfrac{CQ}{BQ}=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) 不等式 $4x^2+5x-12 \leqq 3|x|$ を満たす x の範囲が $a \leqq x \leqq b$ のとき，$a=$ $\boxed{\text{イ}}$，$b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) $\displaystyle\sum_{n=10}^{99}\frac{1}{n(n+1)}$ を既約分数 $\dfrac{b}{a}$ で表すと，$a=$ $\boxed{\text{エ}}$，$b=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

(iv) $x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(v) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(0)=1$，$f'(1)=-2$，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{8}{3}$ を満たすとき，$a=$ $\boxed{\text{キ}}$，$b=$ $\boxed{\text{ク}}$，$c=$ $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(vi) $n \leqq 6\log_2 3 < n+1$ を満たす自然数 n は $n=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。

(vii) 関数 $f(\theta)=3\cos^2\theta-6\sin\theta+1$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(viii) 2つの自然数 a，b $(a<b)$ の差が3，最小公倍数が126のとき，$a=$ $\boxed{\text{ス}}$，$b=$ $\boxed{\text{セ}}$ である。

Ⅱ. $a>0$ とする。座標平面上に曲線 $C: y=x^3+2x+3$ がある。C 上の点A $(a,\ a^3+2a+3)$ における C の接線を l とする。l と C の共有点で，Aとは異なる点をBとする。C の接線で，l と平行で l とは異なるものがただ1つある。この直線を m とし，m と C の接点をDとする。m と C の共有点でDとは異なる点をEとする。このとき，次の(ｉ)～(ｖ)に答えよ。解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ｉ) l と y 軸との交点の y 座標を a を用いて表せ。

(ii) Bの x 座標を a を用いて表せ。

(iii) Dの x 座標を a を用いて表せ。

(iv) Eの x 座標を a を用いて表せ。

(ｖ) a の値にかかわらず直線BEが通る点が1つある。この点の座標を求めよ。

III. $a>0$ とする。座標平面上に，点A$(a,\ a)$ と直線 $l：y=2x$ 上の3点P，Q，R があり，次の2つの条件を満たしている。

- Qの x 座標はPの x 座標より小さく，また，Rの x 座標はPの x 座標より大きい。
- 線分の長さについて，$\mathrm{AP}=\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PR}$ である。

三角形AQRの面積を S とする。点P$(p,\ 2p)$ が l 上を動くとき，次の(i)～(v)に答えよ。解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) Aと l の距離を h とする。h を a を用いて表せ。

(ii) 線分QRの長さを S と a を用いて表せ。

(iii) 線分QRの長さを a と p を用いて表せ。

(iv) $S=1$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(v) $S=1$ のとき，線分QRの長さの最小値とそのときの a の値を求めよ。

【以下余白】