

2018年度

S_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はI・IIとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 座標平面上の放物線 $y = 1 - 4x^2$ を C とする. $t > 0$ とし, C 上の点 $P(t, 1 - 4t^2)$ における接線を l , 法線を m とする. また, 直線 m と y 軸の交点を $Q(0, u)$ とする. このとき, 次の問(i)~(vi)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) l の方程式を t を用いて表せ.

(ii) m の方程式を t を用いて表せ.

(iii) t^2 を u を用いて表せ.

(iv) t が $t > 0$ の範囲で動くとき, u の値の範囲を求めよ.

(v) $u > 0$ のとき, $PQ = u$ となる u と t の値をそれぞれ求めよ.

(vi) t が(v)で求めた値であるとき, 直線 l , y 軸, および放物線 C とで囲まれる図形を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

II. s, t を実数, x を 0 でない実数とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が, それぞれ

$$\begin{aligned} a_1 &= s, & a_{n+1} &= s + t \sum_{j=1}^n a_j & (n \geq 1) \\ b_1 &= x + 1, & b_{n+1} &= (x + 1)x^n + \sum_{j=1}^n x^{n-j} b_j & (n \geq 1) \end{aligned}$$

を満たしているとする. このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) a_{n+1} を a_n と t を用いて表せ.

(ii) a_n を s, t, n を用いて表せ.

(iii) $c_n = \frac{b_n}{x^n}$ とおくととき, c_n を x と n を用いて表せ. また b_n を x と n を用いて表せ.

(iv) 無限級数 $A = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するような x の値の範囲を求めよ. またそのときの A の値を求めよ.

(v) b_n を x の関数とみて, それを $f_n(x)$ とおく. このとき, 極限

$$B = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m f_n(e^{\frac{1}{m}} - 1)$$

の値を求めよ.

【以下余白】

