

2020年度

I a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はI・IIとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. p を正の定数として、関数

$$f(x) = xe^{px}$$

の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。また、 $f^{(0)}(x) = f(x)$ とおく。このとき、関数 $f^{(n)}(x)$ はある定数 a_n, b_n を用いて

$$f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{px} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表される。次の問 (i) ~ (vi) に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) n を 0 以上の整数とすると、 a_{n+1} と b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n , および、 p を用いて表せ。
- (ii) a_n, b_n をそれぞれ p と n を用いて表せ。
- (iii) $f^{(n+1)}(x) = 0$ となる x の値をすべて求め、 $f^{(n)}(x)$ の増減表を書け。
- (iv) $f^{(n)}(x)$ は $x = c_n$ で最小値をとる。 c_n を p と n を用いて表せ。また、 $f^{(n)}(x)$ の最小値を p と n を用いて表せ。
- (v) 1 以上の整数 n に対して、 x 軸、直線 $x = c_n$, および、曲線 $y = f^{(n)}(x)$ で囲まれる図形の面積 S_n を p と n を用いて表せ。
- (vi) S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を (v) で求めた面積とすると、無限級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

が収束するような p の値の範囲を求めよ。また、そのときの S を p を用いて表せ。

II. a と b を 0 以上の実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(1, 2, 2)$, $B(2, -1, 2)$, $C(-1, 1, 1)$ と点 $P(a, b, 3)$ がある。3 つの直線 PA , PB , PC と xy 平面の交点をそれぞれ A' , B' , C' とする。このとき、次の問 (i) ~ (vi) に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) t を実数とする。直線 PA 上の点 Q の位置ベクトル \overrightarrow{OQ} を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PA}$ と表すとき、 \overrightarrow{OQ} を t, a, b を用いて成分表示せよ。
- (ii) A' の座標を a, b を用いて表せ。
- (iii) B', C' の座標をそれぞれ a, b を用いて表せ。
- (iv) 内積 $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ を a, b を用いて表せ。
- (v) 3 点 A', B', C' を頂点とする三角形が $\angle B'A'C' = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるような、組 (a, b) を求めよ。
- (vi) (v) のとき、 xy 平面上の点 X' を四角形 $A'B'X'C'$ が正方形になるようにとる。 X' の座標を求めよ。

【以下余白】

