2020年度

T 数 学 問 題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべてＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシルで記入することになっています。ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3．この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお，出席票は切り離さないでください。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ．次の空欄ア～コに当てはまる数または式を記入せよ。

(i)　a を正の実数とする。$f(x) = ax^2 - x^3$ の極大値 M が $4 \leqq M \leqq 32$ を満たすような a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} \leqq a \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii)　$r < 1$ とする。第2項が4，初項から第3項までの和が21である等比数列の初項を a，公比を r とするとき，$a = \boxed{\text{ウ}}$，$r = \boxed{\text{エ}}$ である。

(iii)　$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めると $(x,\ y) = \boxed{\text{オ}}$ である。

(iv)　2^{-2020} を小数で表したとき，小数第 $\boxed{\text{カ}}$ 位に初めて0でない数字が現れる。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(v)　1個のさいころを3回投げて，2以下の目が2回以上出る確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(vi)　原点をOとする座標平面において，第1象限内の点Aは直線 $y = \sqrt{3}x$ 上にあり，かつ $\mathrm{OA} = 1$ を満たすとする。Aを通り傾きが -1 の直線と x 軸の交点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とするとき，$b = \boxed{\text{ク}}$ である。

(vii)　$y = |5x| - 3$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(viii)　a，b を互いに異なる実数とする。2次方程式 $x^2 + (a+1)x + b - 2 = 0$ の解が a，b であるような実数の組 $(a,\ b)$ をすべて挙げると $(a,\ b) = \boxed{\text{コ}}$ である。

Ⅱ. k を正の実数とする。放物線 $C: y=x^2-1$ と直線 $l: y=kx$ の共有点をA，Bとし，A，Bの x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。Aにおける C の接線を m_1，Bにおける C の接線を m_2 とする。また，m_1 と m_2 の交点をQとする。

このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) m_1 の方程式を α を用いて表せ。

(ⅱ) $\alpha+\beta$ を k を用いて表せ。

(ⅲ) Qの座標を k を用いて表せ。

(ⅳ) k が $2 \leqq k \leqq 5$ の範囲を動くとき，点Qの動く軌跡の長さ L を求めよ。

(ⅴ) $k=2$ とする。Qを通り l と垂直に交わる直線と l の交点をHとするとき，Hの座標を求めよ。

Ⅲ． 半径１の円に内接する三角形ABCは，AB＝ACを満たしている。また，$\angle \mathrm{CAB} = 2\alpha$，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=l$，三角形ABCの面積を S，三角形ABCの内接円の半径を r とする。このとき，次の問（ｉ）～（ｖ）に答えよ。解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと。

（ｉ）　ACの長さを $\cos\alpha$ を用いて表せ。

（ⅱ）　l を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ を用いて表せ。

（ⅲ）　S を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ を用いて表せ。

（ⅳ）　r を l と S を用いて表せ。

（ｖ）　r を $\sin\alpha$ を用いて表せ。

【以下余白】