2017年度

D 数学問題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません.
2. 解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆またはＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています. ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください.
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません.)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています. 試験開始後, ただちにページ数を確認してください. なお, 問題番号はⅠ～Ⅲとなっています.
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので, 出席票の受験番号が, あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し, 出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください. なお, 出席票は切り離さないでください.
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し, その他の部分には何も書いてはいけません.
6. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったり, 傷つけたりしないように注意してください.
7. 計算には, この問題冊子の余白部分を使ってください.
8. この問題冊子は持ち帰ってください.

I．次の空欄ア〜コに当てはまる数または式を記入せよ．

（i）有理数 a，b が等式 $\sqrt{2}\,(\sqrt{2}a - b - 5\sqrt{2}) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(a - 4) - 2b = 0$ を満たすとき，$a =$ ［ア］，$b =$ ［イ］である．

（ii）三角形ABCにおいて，辺ABを 1：2 に内分する点をD，辺BCを 1：2 に内分する点をEとする．線分AEと線分CDの交点をFとするとき，$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DF}}$ の値は［ウ］である．

（iii）$\log_{16} 125 \cdot \log_{25} 256$ を簡単にすると，［エ］となる．ただし，対数記号を用いずに表せ．

（iv）15以下の自然数の集合を全体集合とし，その中で28の約数の集合を A，16の約数の集合を B，24の約数の集合を C とする．$\overline{A \cup B} \cap C$ の要素を書き並べて表すと［オ］である．ただし，$\overline{A \cup B}$ は，$A \cup B$ の補集合とする．

（v）$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x) = -2x^3 + x$ は最大値［カ］をとる．

（vi）関数 $f(x)$ が実数 a に対して，等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - x^2 - 2x + a^2 - 4$ を満たすとき，a の値は［キ］である．

（vii）数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，$\{t_n\}$ は，すべての自然数 n に対して次の等式を満たす．

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \\ t_n = p_n + \sqrt{2}\,q_n \end{cases}$$

ただし，$p_1 = q_1 = 1$ とする．このとき，数列 $\{t_n\}$ は公比［ク］の等比数列であり，一般項は $t_n =$ ［ケ］である．

（viii）$|x| \leqq 3$ を満たす，すべての実数 x に対して $-ax^2 - 2ax + 6 - a > 0$ となる定数 a の範囲は［コ］である．

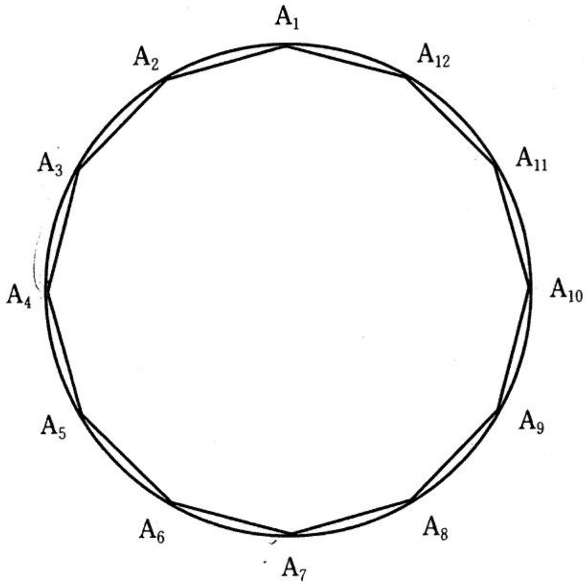
Ⅱ． 図のような半径1の円に内接する正十二角形について，次の問(ⅰ)～(ⅳ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) この正十二角形の1辺の長さを a とするとき，a^2 の値を求めよ．

(ⅱ) $\triangle A_1A_5A_9$ の面積を求めよ．

(ⅲ) この正十二角形の頂点を結んで作ることができる二等辺三角形のうち，正三角形ではないものの個数を求めよ．

(ⅳ) (ⅲ)で個数を求めた二等辺三角形の面積を考える．その中で，最大の面積を S_1，2番目に大きい面積を S_2 ($S_1 > S_2$) とするとき，S_1，S_2 の値をそれぞれ求めよ．



図

Ⅲ. 座標空間において，原点Oと点A(1，1，2)を通る直線を l とする．また，点B(3，4，−5)を中心とする半径7と半径6の球面をそれぞれ S_1，S_2 とする．このとき，次の問(ⅰ)〜(ⅴ)に答えよ．解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(ⅰ) 球面 S_1 の方程式を求めよ．

(ⅱ) 直線 l と球面 S_1 の2つの交点のうち原点からの距離が小さい方をP_1，大きい方をP_2とする．$\overrightarrow{OP_1}=t_1\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP_2}=t_2\overrightarrow{OA}$ と表すとき，t_1，t_2 の値をそれぞれ求めよ．

(ⅲ) 点Qを直線 l 上の点とするとき，2点Q，Bの距離の最小値を求めよ．

(ⅳ) 球面 S_2 と xy 平面が交わってできる円 C の半径 r の値を求めよ．

(ⅴ) zx 平面と接し，xy 平面との交わりが(ⅳ)で定めた円 C となる球面は2つある．この2つの球面の中心間の距離を求めよ．

【以下余白】