2014年度

E 数学問題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません．
2．解答用紙はすべて**ＨＢの黒鉛筆**または**ＨＢの黒のシャープペンシル**で記入することになっています．ＨＢの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください．(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません．)
3．この問題冊子は**8ページ**までとなっています．試験開始後，ただちにページ数を確認してください．なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています．
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，出席票の受験番号が，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し，出席票の氏名欄に**氏名のみ**を記入してください．なお，出席票は切り離さないでください．
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません．
6．解答用紙を折り曲げたり，破ったり，傷つけたりしないように注意してください．
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください．
8．この問題冊子は持ち帰ってください．

I．次の空欄ア，イに「真」または「偽」のいずれかを記入せよ．また空欄ウ〜サに当てはまる数または式を記入せよ、解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

（i）実数 a，b について，命題「$ab=0$ ならば $b=0$ である」の逆は $\boxed{\text{ア}}$ であり，裏は $\boxed{\text{イ}}$ である．

（ii）$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\boxed{\text{ウ}}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\boxed{\text{エ}}$ と，いずれも整数で表せる．

（iii）すべての実数 x について2次不等式 $x^2-2(k+1)x+2k^2>0$ が成立するような実数 k の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．

（iv）1から4までの数字が1つずつ書かれたカードをそれぞれ2枚用意する．この8枚のカードから6枚を同時に引き，その中で最大の数を X とするとき，X の期待値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

（v）$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ の最大値は $\boxed{\text{キ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

（vi）方程式 $\log_{\frac{1}{2}}x^2+\log_2 x^{\frac{3}{2}}+\log_4 x^{-1}=4$ を満たす x の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

（vii）等差数列をなす3つの数がある．これらの和が1で，平方の和が $\dfrac{11}{24}$ であるとき，3つの数は $\boxed{\text{コ}}$ である．

（viii）ベクトル $\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が垂直であるときの x の値をすべて求めると，$\boxed{\text{サ}}$ である．

Ⅱ．C_1 を半径 1 の円とする．円 C_1 に内接する正方形を S_1 とする．正方形 S_1 に内接する円を C_2 とする．以下同様に，円 C_n に内接する正方形を S_n とし，正方形 S_n に内接する円を C_{n+1} とする．このとき，次の問(ｉ)～(iv)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(ｉ) 円 C_2 の半径を r_2 とする．r_2 を求めよ．

(ii) 円 C_n の半径を r_n とする．r_n を n の式で表せ．

(iii) 正方形 S_n の面積を A_n とし，$T_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ とする．T_n を n の式で表せ．

(iv) T_n が円 C_1 の面積よりも大きくなるような自然数 n のうち，最小のものを求めよ．

III. 実数 $p \neq -1$ に対し，2つの直線 l，m と放物線 C を

$$l : y = -x + 1, \quad m : y = px - p^3, \quad C : y = \frac{1}{4}x^2 + qx + r$$

とする．このとき，次の問(i)〜(iv)に答えよ．解答は解答用紙の所定欄に記入せよ．

(i) 放物線 C と直線 l が点Aで接しているとき，r を q の2次式で表せ．また，点Aの x 座標を q を用いて表せ．

(ii) 放物線 C と直線 l が点Aで接し，さらに放物線 C と直線 m が点Bで接しているとき，q を p の2次式で表せ．また，点Bの x 座標を p を用いて表せ．

(iii) 放物線 C と直線 l が点Aで接し，さらに放物線 C と直線 m が点Bで接しているとき，放物線 C の頂点の y 座標が最大になるような p の値を求めよ．

(iv) (i)，(ii)，(iii)で定められる p，q，r に対して，点Aを通り y 軸と平行な直線，点Bを通り y 軸と平行な直線，x 軸，および放物線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

【以下余白】