2015 年度入学試験問題　　211

デザイン工学部Ａ方式Ｉ日程・理工学部Ａ方式Ｉ日程
生命科学部Ａ方式Ｉ日程

2　限　数　　学　(90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっています。問題に指示されている通りに解答しなさい。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としないので注意すること。
4. 問題文は 4 ページから 17 ページまでとなっています。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1)　解答上の注意

問題文中の ア，イ，ウ,… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または 0 ～ 9 までの数が 1 つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続きます。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

〔Ⅰ〕

(1) 整数 x，y が

$$xy - 2x - 3y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。このとき，

$$\left(x - \boxed{ア}\right)\left(y - \boxed{イ}\right) = \boxed{ウ}$$

が成り立つから，① を満たす x，y の組 (x, y) の個数は $\boxed{エ}$ である。

(2) x の多項式 $f(x) = x^4 - x^3$ を，$x - 2$ で割った余りは $f\left(\boxed{オ}\right) = \boxed{カ}$ である。

x の多項式 $g(x) = x^{104} + x^{46} + 7$ を，$x^2 = t$ とおいて t の多項式と考えると，その次数は $\boxed{キク}$ である。

$g(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りは $\boxed{ケ}$ である。

(3) 方程式 $\sin 4x = 0$ の，$-\pi < x < \pi$ における解の個数は $\boxed{コ}$ である。

(4) 方程式 $x^{\log_{10} x} = x^5$ は，解をちょうど2個持つ。

小さい方の解を α とおくと，$\alpha = \boxed{サ}$ である。大きい方の解を β とおくと，$\log_{10} \beta = \boxed{シ}$ であり，β は $\boxed{ス}$ 桁(けた)の整数である。

(計 算 用 紙)

〔Ⅱ〕

原点をOとするxyz空間において，3点

$A(8\sqrt{3}, 8, 0)$, $B(5\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+5, 2\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1, 2\sqrt{3})$

をとる。このとき，

$$\overrightarrow{CB} = \left(\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}, \boxed{ウ}, \boxed{エ}\right)$$

である。また，

$$\overrightarrow{CB} = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

となるから，4点O，A，B，Cは同一平面上にある。

$OC = \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ であり，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{ケコ}$ である。また，$\angle AOC = \alpha$ とおくとき，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

直線ACとOBの交点をEとする。$\overrightarrow{OE}$は，実数sを用いて，$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CA}$と表すことができる。また，実数$t$を用いて，$\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB}$と表すこともできるから，

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\overrightarrow{OC}$$

となる。

三角形OAEの面積は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ となる。

(計 算 用 紙)

〔Ⅲ〕

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ が成り立つ。

ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ については，以下のA群の①〜⑤からそれぞれ1つを選べ。

A群

① $\tan\alpha+\tan\beta$　② $\tan\alpha-\tan\beta$　③ $\tan\alpha\tan\beta$

④ $1-\tan\alpha\tan\beta$　⑤ $1+\tan\alpha\tan\beta$

実数 a，b，c が，$\tan a=\dfrac{1}{2}$，$\tan b=3$，$\tan c=1$ を満たすとする。

$\tan(a+b)=\boxed{ウエ}$ が成り立つ。$\tan(a+b+c)=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ が成り立つ。

ただし，$\boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$ については，以下のB群の①〜⑥からそれぞれ1つを選べ。

B群

① $1+\sin\theta$　② $1-\sin\theta$　③ $\sin\theta-1$

④ $1+\cos\theta$　⑤ $1-\cos\theta$　⑥ $\cos\theta-1$

$\dfrac{\pi}{2}$ より小さい正の数 θ が，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ を満たすとき，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であり，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

(計 算 用 紙)

次の問題〔Ⅳ〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅳ〕

座標平面上の放物線

$$y=\frac{1}{2}x^2+x$$

を C とする。また，a，b を，$a^2>b$ を満たす実数として，放物線

$$y=-\frac{1}{2}x^2+(1-2a)x-b$$

を C' とする。

$a^2>b$ であることより，C と C' は異なる2点で交わる。C と C' の2つの交点を $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2+\alpha\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \frac{1}{2}\beta^2+\beta\right)$ とする。ただし，$\alpha<\beta$ とする。

$\alpha+\beta=\boxed{ア}$，$\alpha\beta=\boxed{イ}$ であり，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{ウ}$ である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ については，以下の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ $-2a$　① $-2b$　② a　③ b　④ ab

⑤ a^2-b　⑥ $4a^2-2b$　⑦ $2a$　⑧ $4a$　⑨ $2b$

(〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。)

点 A における C の接線と，A における C' の接線が直交するとき，

$$\alpha^2 + \boxed{\text{エ}}\, a\alpha + \boxed{\text{オ}}\, a - \boxed{\text{カ}} = 0$$

が成り立つ。

さらに，点 B における C の接線と，B における C' の接線も直交するとすると，

$$\beta^2 + \boxed{\text{エ}}\, a\beta + \boxed{\text{オ}}\, a - \boxed{\text{カ}} = 0$$

が成り立ち，

$$\boxed{\text{キ}}\, a - b - \boxed{\text{ク}} = 0$$

となる。

ここで，$a = 0$ とすると，$\alpha = \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$，$\beta = \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ となり，C と C' で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

次の問題〔V〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

n を正の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (-1)^n n^2$ で定める。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく。$S_1 = \boxed{アイ}$，$S_2 = \boxed{ウ}$，$S_3 = \boxed{エオ}$ である。

m を正の整数とする。$n = 2m$ のとき，

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{m} \left(\boxed{カ}\, k - \boxed{キ} \right)$$

となるから，$S_{2m} = \boxed{ク}\, m^{\boxed{ケ}} + m$ である。

また，$S_{2m+1} = -\boxed{コ}\, m^{\boxed{サ}} - \boxed{シ}\, m - \boxed{ス}$ である。

$S_n > 800$ を満たす最小の n の値は $\boxed{セソ}$ である。

次に，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^3$$

とおくと，$T_{2m} = \boxed{タ}\, m^{\boxed{チ}} + \boxed{ツ}\, m^{\boxed{テ}}$ である。ただし，$\boxed{チ} > \boxed{テ}$ とする。

(計 算 用 紙)

次の問題〔Ⅵ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅵ〕

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

とする。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{x\left(x + \boxed{ア}\right)\left(x - \boxed{イ}\right)}{(1+x^2)^{\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}}}$$

である。$f(x)$ の最小値は $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

xy 平面の曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = \sqrt{3}$ で囲まれた部分を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とおくと，

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\boxed{キ} + x^2 + \frac{\boxed{ク}}{1+x^2} \right) dx$$

である。

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

定積分

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

の値を置換積分法により求める。$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ として，$x=\tan t$ とおくとき，

x が 0 から $\sqrt{3}$ まで変化すると，t は $\boxed{ケ}$ から $\dfrac{\pi}{\boxed{コ}}$ まで変化する。

また，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{1}{1+x^2}$ を t を用いて表すと，それぞれ

$$\frac{dx}{dt}=\boxed{サ},\qquad \frac{1}{1+x^2}=\boxed{シ}$$

となる。

ただし，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ については，以下の ⓪～⑨ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ $\cos t$　① $\sin t$　② $\tan t$　③ $\cos^2 t$　④ $\sin^2 t$

⑤ $\tan^2 t$　⑥ $\dfrac{1}{\cos^2 t}$　⑦ $\dfrac{1}{\sin^2 t}$　⑧ $\dfrac{1}{\tan^2 t}$　⑨ t

以上より，$I=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\pi$ であり，

$$V=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\pi^2+\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}\,\pi$$

となる。

次の問題〔Ⅶ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅶ〕

e を自然対数の底とし，対数は自然対数とする。$f(x)$ を

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2} \quad (x>0)$$

とし，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\frac{\boxed{ア}-\boxed{イ}\log x}{x^{\boxed{ウ}}}$$

であり，$f'(x)=0$ となるのは，$x=e^{\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}}$ のときである。$x>e^{\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}}$ のとき，$f(x)$ は $\boxed{カ}$ する。

ただし，$\boxed{カ}$ については，以下のA群の⓪～③から1つを選べ。

A群

⓪ つねに増加

① 増加したのち，減少

② 減少したのち，増加

③ つねに減少

(〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。)

$f(9)$ $\boxed{キ}$ $f(10)$ であるから，$\log 9^{100}$ $\boxed{ク}$ $\log 10^{81}$ となり，10^{81} $\boxed{ケ}$ 9^{100} が成り立つ。ここで，必要ならば $2 < e < 3$ であることを用いてもよい。

ただし，$\boxed{キ}$ ～ $\boxed{ケ}$ については，以下のB群の ⓪～② からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

B群

⓪ $=$　　① $<$　　② $>$

C と x 軸，および直線 $x = e^{\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}}$ で囲まれた部分の面積を S とおくと，

$$S = \int_{\boxed{コ}}^{e^{\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}}} f(x)\,dx$$

である。部分積分法によって，

$$S = \boxed{サ} - \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}} e^{\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}}$$

となる。

（以　上）

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HB の黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしてはいけません。

② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

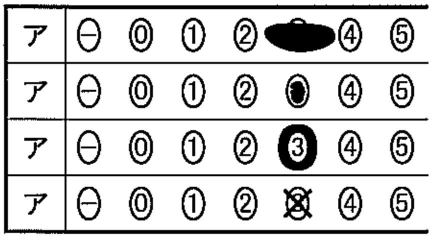
③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。

④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしてはいけません。

⑤ **ア**の解答を 3 にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例

悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしてはいけません。

枠全体をマークしなさい。

○でかこんでマークしてはいけません。

×を書いてマークしてはいけません。