2020 年度入学試験問題

情報科学部A方式

2　限　数　　　学　(90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 問題文は４ページから25ページまでです。
4. マークシート解答方法については以下の解答上の注意を読みなさい。
5. 問題冊子のページを切り離してはいけません。

解答上の注意

1. 問題文中のア，イ，ウ，… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），０～９の数が１つずつ入ります。解答群が示されている場合は，選択肢のアルファベットが１つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。
ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子を可能な限り約分して解答しなさい。
また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

例	解答欄	解答	記入のしかた
1.	$\dfrac{\boxed{アイ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エオ}}$	$-\dfrac{\sqrt{18}}{22}$	$\dfrac{\boxed{-3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2\ 2}}$

2. マークシート記入上の注意については，問題冊子の裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

〔Ⅰ〕

(1) i を虚数単位とする。z の方程式 $8z^3 = i$ の解は

$$z = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}i,\quad -\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}i,\quad \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}i$$

である。

(2)　a を実数とする。x の方程式

$$\cos^2 x + \sin x + a = 0$$

が，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，少くとも1つ解をもつのは

$$\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ソタ}}$$

のときである。

（〔Ⅰ〕の問題は続く）

(3)　$2 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{100}$ を小数で表したとき，小数第 $\boxed{\text{チツ}}$ 位に初めて0でない数字が現れる。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(4)

- n を正の整数とするとき，n^2 が3の倍数であることは，n が3の倍数であることの $\boxed{テ}$ 。

- x を実数とするとき，$|x-3| = 5x$ は，$x = -\dfrac{3}{4}$ であることの $\boxed{ト}$ 。

$\boxed{テ}$ ，$\boxed{ト}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ　必要条件でも十分条件でもない

ⓑ　必要条件であるが，十分条件ではない

ⓒ　十分条件であるが，必要条件ではない

ⓓ　必要十分条件である

〔Ⅱ〕

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}$$

とする。

座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。C は曲線 $y = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{x}$ を，x 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ ，y 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$ だけ平行移動したものである。

直線 $y = -x - 4$ を ℓ とする。C と ℓ の交点の x 座標は $\boxed{\text{エオ}}$ および $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{エオ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

曲線 C 上の点 $\left(\boxed{\text{エオ}},\ f(\boxed{\text{エオ}})\right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}x + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

（〔Ⅱ〕の問題は続く）

x, y が連立不等式

$$\begin{cases} x < 3 \\ y \geqq -x - 4 \\ y \leqq \dfrac{3x}{x-3} \end{cases}$$

を満たすとき，$9x + 16y$ の最小値は $\boxed{\text{シスセ}}$ ，最大値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積は

$$\boxed{\text{タチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\log 3$$

である。ただし，対数は自然対数とする。

〔Ⅲ〕

点 O を原点とする座標平面上に点 P(2, 3) と Q(3, 4) がある。

(1) 2 点 P, Q の中点と O を通る直線の傾きは $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) k を実数とし，直線 $y = kx$ を ℓ とする。$\vec{s} = \left(1, \boxed{ウ}\right)$ は，ℓ に平行なベクトルである。ℓ と直線 OP のなす角を α $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\ell$ と直線 OQ のなす角を β $\left(0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{エ}$$

であり，

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{オ}}{\sqrt{\boxed{カキ}}\sqrt{1 + \boxed{ク}}}$$

である。

同様に，

$$\cos\beta = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}\sqrt{1 + \boxed{サ}}}$$

である。

$\alpha = \beta$ となるのは，

$$k = \frac{\boxed{シ} + \boxed{ス}\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タチ}}$$

のときである。

$\boxed{ウ}$ ～ $\boxed{オ}$, $\boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$, $\boxed{サ}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ 0	ⓑ 1	ⓒ k	ⓓ k^2
ⓔ k^3	ⓕ $k+1$	ⓖ $3k+2$	ⓗ $4k+3$
ⓘ $2k+3$	ⓚ $3k+4$		

（〔Ⅲ〕の問題は続く）

(3)　t を実数とし，直線 $y = tx$ を m とする。P(2，3) と m の距離を u，Q(3，4) と m の距離を v とする。

t の関数 $f(t)$ を，$f(t) = u^2 + v^2$ とする。

$$f(t) = \frac{\boxed{\text{ツテ}}\,t^2 - \boxed{\text{トナ}}\,t + \boxed{\text{ニヌ}}}{t^2 + \boxed{\text{ネ}}}$$

であり，右辺の分子を分母で割ると，商は $\boxed{\text{ノハ}}$，余りは

$-\boxed{\text{ヒフ}}\left(\boxed{\text{ヘ}}\,t - 1\right)$ である。

よって，

$$f(t) = \boxed{\text{ノハ}} - \frac{\boxed{\text{ヒフ}}\left(\boxed{\text{ヘ}}\,t - 1\right)}{t^2 + \boxed{\text{ホ}}}$$

となり，

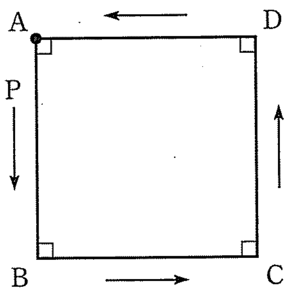
$$f'(t) = \frac{\boxed{\text{マミ}}\left(\boxed{\text{ム}}\,t^2 - \boxed{\text{メ}}\,t - 3\right)}{\left(t^2 + \boxed{\text{モ}}\right)^{\boxed{\text{ヤ}}}}$$

となる。

$f(t)$ は，$t = \dfrac{\boxed{\text{ユ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヨラ}}}}{\boxed{\text{リ}}}$ のとき，最小値をとる。

（計 算 用 紙）

〔Ⅳ〕



1辺の長さが1の正方形ABCDがある。

1個のさいころを投げて出た目によって，ABCDの周上を，左まわりに動く点Pがある。1回目にさいころを投げる前にPは頂点Aの上にある。

さいころを投げて出た目がxであるとき，Pは次のように動く。Pが頂点AまたはBの上にあるとき，Pは距離xだけ進み，Pが頂点CまたはDの上にあるとき，Pは距離4だけ進む。

さいころを n 回投げたとき，Pが頂点Aの上にある確率を a_n，Pが頂点Bの上にある確率を b_n とすると，

$$a_1 = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad b_1 = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

であり，a_{n+1}，b_{n+1} を，それぞれ a_n と b_n を用いて表すと

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} a_n + \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} a_n + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} b_n$$

となる。

(〔Ⅳ〕の問題は続く)

数列$\{a_n+\beta b_n\}$が等比数列となるようなβの値は，

$$\beta=\pm\boxed{ス}$$

である。$\beta_1=\boxed{ス}$，$\beta_2=-\boxed{ス}$とおく。

数列$\{c_n\}$を，$c_n=a_n+\beta_1 b_n$で定める。$\{c_n\}$は，初項$\boxed{セ}$，公比$\boxed{ソ}$の等比数列であり，一般項$c_n=a_n+\beta_1 b_n$は

$$a_n+\beta_1 b_n=\left(\boxed{タ}\right)^{\boxed{チ}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

である。

数列$\{d_n\}$を，$d_n=a_n+\beta_2 b_n$で定める。$\{d_n\}$の一般項$d_n=a_n+\beta_2 b_n$は

$$a_n+\beta_2 b_n=\left(\boxed{ツ}\right)^{\boxed{テ}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

である。

無限級数の和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n$は

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n=\frac{\boxed{ト}-\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌネ}}$$

である。

$\boxed{ス}$ ～ $\boxed{タ}$ ， $\boxed{ツ}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ $\frac{1}{2}$	ⓑ $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	ⓒ $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	ⓓ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
ⓔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{2}$	ⓖ $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$	ⓗ $\frac{1-\sqrt{2}}{6}$
ⓘ $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$	ⓚ $\frac{\sqrt{2}}{6}$		

$\boxed{チ}$ ， $\boxed{テ}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ n	ⓑ $n-1$	ⓒ $n+1$	ⓓ $1-n$
ⓔ $-n-1$	ⓕ $2n$	ⓖ $2n+1$	ⓗ $2n-1$
ⓘ n^2	ⓚ n^3		

（〔Ⅳ〕の問題は続く）

式ⓘ，ⓘⓘから b_n を消去すると，

$$a_n = \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\left\{\left(\boxed{ヒ}\right)^{\boxed{フ}} + \left(\boxed{ヘ}\right)^{\boxed{ホ}}\right\}$$

となる。ただし，$\boxed{ヒ} > \boxed{ヘ}$ とする。

同様に，式ⓘ，ⓘⓘから a_n を消去すると，

$$b_n = \frac{\sqrt{\boxed{マ}}}{\boxed{ミ}}\left\{\left(\boxed{ム}\right)^{\boxed{メ}} - \left(\boxed{モ}\right)^{\boxed{ヤ}}\right\}$$

となる。

また，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{\boxed{ユ}} + \boxed{ヨ}}{\boxed{ラリ}}$$

である。

$\boxed{ヒ}$, $\boxed{ヘ}$, $\boxed{ム}$, $\boxed{モ}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ $\dfrac{1}{2}$	ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	ⓒ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$	ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$
ⓔ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	ⓕ $-\dfrac{1}{2}$	ⓖ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{6}$	ⓗ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{6}$
ⓘ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$	ⓚ $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$		

$\boxed{フ}$, $\boxed{ホ}$, $\boxed{メ}$, $\boxed{ヤ}$ の解答群（同じものを何回選んでもよい。）

ⓐ n	ⓑ $n-1$	ⓒ $n+1$	ⓓ $1-n$
ⓔ $-n-1$	ⓕ $2n$	ⓖ $2n+1$	ⓗ $2n-1$
ⓘ n^2	ⓚ n^3		

〔V〕

曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ を F，曲線 $y = \sqrt{3}\cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ を G とする。

(1)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，$|\sin x| = |\sqrt{3}\cos x|$ となる x の値は

$$x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。ただし，$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi < \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ とする。

(2)　F と G および 2 直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$，$x = \dfrac{3}{4}\pi$ で囲まれた部分の面積は

$$\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

（〔V〕の問題は続く）

(3) 不定積分 $\int \sin^2 x\, dx$ は

$$\int \sin^2 x\, dx = \boxed{サ}$$

である。

$\boxed{サ}$ の解答群（解答群中の C は積分定数。）

ⓐ $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$	ⓑ $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$
ⓒ $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$	ⓓ $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$
ⓔ $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$	ⓕ $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$
ⓖ $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$	ⓗ $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$

(4)　F と G および 2 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$，$x = \dfrac{5}{4}\pi$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は

$$\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi^2 + \left(\boxed{セ} + \frac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}\right)\pi$$

である。

（以　上）

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

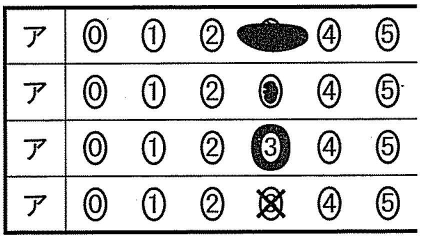
記入上の注意

マークシート解答は，鉛筆でマークしたものを機械が直接読みとって採点する。したがって解答はHBの黒鉛筆でマークすること(万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを使用しないこと)。

① 記入例　**ア**の解答を3にマークする場合。

正しいマークの例

悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしないこと。

枠全体をマークするようにしなさい。

○でかこんでマークしないこと。

×を書いてマークしないこと。

② 解答を訂正する場合は，消しゴムでよく消してから，あらためてマークすること。

③ 解答用紙をよごしたり，折りまげたりしないこと。

④ 問題に指定された数よりも多くマークしないこと。