2019 年度入学試験問題

情報科学部Ａ方式

2　限　数　　学　(90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 問題文は 4 ページから28ページまでです。
4. マークシート解答方法については以下の解答上の注意を読みなさい。
5. 問題冊子のページを切り離さないこと。

解答上の注意

1. 問題文中のア，イ，ウ，… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，
   －（マイナスの符号），０～９の数が１つずつ入ります。
   当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄に
   マークして解答しなさい。
   ただし，分数の形で解答が求められているときには，
   符号は分子に付け，分母・分子を可能な限り約分して解答しなさい。
   また，根号を含む形で解答が求められているときには，
   根号の中に現れる自然数は最小になるように解答しなさい。

例	解答欄	解答	記入のしかた
1.	$\dfrac{\boxed{アイ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エオ}}$	$-\dfrac{\sqrt{18}}{22}$	$\dfrac{\boxed{-3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2\ 2}}$

2. マークシート記入上の注意については，問題冊子の裏表紙に記載してあるので，
   この問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

〔Ⅰ〕

(1) 次の，x の関数が周期関数ならば，その関数の周期を解答群から選べ。ただし，正のもっとも小さい周期を選ぶこと。例えば，関数 $\sin x$ の正のもっとも小さい周期は 2π である。関数が周期関数でない場合は 0 を選べ。同じものを何回選んでもよい。

$1 + \tan x$ の周期は $\boxed{ア}$ である。
$x + \sin x$ の周期は $\boxed{イ}$ である。
$|\sin x|$ の周期は $\boxed{ウ}$ である。
$\sin x \cos x$ の周期は $\boxed{エ}$ である。
$\dfrac{1}{\sin x}$ の周期は $\boxed{オ}$ である。
$\sin x + \cos 2x$ の周期は $\boxed{カ}$ である。

$\boxed{ア}$ 〜 $\boxed{カ}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{4}$	② $\dfrac{1}{4}\pi$	③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{1}{2}\pi$	⑤ 1	⑥ π	⑦ 2
⑧ 2π	⑨ 4	⑩ 4π	

（〔Ⅰ〕の問題は続く）

（計　算　用　紙）

(2) 以下の空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

関数$f(x) = xe^{-x^2}$は，すべての実数xについて$f(-x) = \boxed{\text{キ}}$を満たし，$\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \boxed{\text{ク}}$である。

次に，$\displaystyle\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} x^2 e^{-x^2} dx$を計算する。ただし，以下の(a)，(b)は前提知識として与えられているものとする。

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \cdots \text{(a)} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0 \cdots \text{(b)}$$

まず，部分積分を使って$\displaystyle\int_{-r}^{r} x^2 e^{-x^2} dx$を計算する。

$$x^2 e^{-x^2} = \frac{-x}{2} \times (-2x)\, e^{-x^2} = \frac{-x}{2} \frac{d}{dx}\left(\boxed{\text{ケ}}\right)$$

と考えて，以下のように変形するとよい。

$$\int_{-r}^{r} x^2 e^{-x^2} dx = \Big[\boxed{\text{コ}}\Big]_{-r}^{r} - \int_{-r}^{r} \boxed{\text{サ}}\, dx$$

$x > 1$においては，$e^x < e^{x^2}$だから，

$$0 < \frac{x}{e^{x^2}} < \frac{x}{e^x}$$

であり，(b)を用いると，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} xe^{-x^2} = \boxed{\text{シ}}$となる。

これらの結果および(a)を用いると，

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} x^2 e^{-x^2} dx = \boxed{\text{ス}}$$

である。

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ $f(x)$	① $f(x+1)$	② $f(x-1)$
③ $f(2x)$	④ $-f(x)$	⑤ $-f(x+1)$
⑥ $-f(x-1)$	⑦ $-f(-2x)$	⑧ $\dfrac{1}{f(-x)}$
⑨ $-\dfrac{1}{f(x)}$		

$\boxed{ク}$ ・ $\boxed{シ}$ ・ $\boxed{ス}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$	③ $\sqrt{\pi}$
④ $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$	⑤ $\sqrt{\pi}+1$	⑥ e^{-r}	⑦ e^{-r^2}
⑧ ∞	⑨ $-\infty$		

$\boxed{ケ}$ ～ $\boxed{サ}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$	① $\dfrac{-1}{2}e^{-x^2}$	② $xe^{-\frac{x^2}{2}}$	③ xe^{-x^2}
④ $e^{-\frac{x^2}{2}}$	⑤ e^{-x^2}	⑥ $\dfrac{x}{2}e^{-x^2}$	⑦ $\dfrac{-x}{2}e^{-x^2}$
⑧ $\dfrac{x^2}{2}e^{-x^2}$	⑨ $\dfrac{-x^2}{2}e^{-x^2}$		

（〔Ｉ〕の問題は続く）

(3)　$x = 1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ のとき，

$x^7 - 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ の値は，

$\boxed{セ} + \sqrt{\boxed{ソ}}$ である。

（計　算　用　紙）

〔Ⅱ〕

(1) C を複素数全体の集合とし，次のような C の部分集合 S，T，R を考える。

$$S=\{z\mid z \text{ は } z^2=1 \text{ を満たす複素数}\}$$
$$T=\{z\mid z \text{ は } z^3=1 \text{ を満たす複素数}\}$$
$$R=\{z\mid z \text{ は } z^6=1 \text{ を満たす複素数}\}$$

ここでは，全体集合を C とし，その部分集合 A に対する補集合を $\overline{A}$ と表す。また，空集合を $\emptyset$ と表す。

以下のそれぞれが真の命題となるように，空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

$$-1\ \boxed{\text{ア}}\ S,\quad S\ \boxed{\text{イ}}\ T=\{1\},\quad S\ \boxed{\text{ウ}}\ \overline{R}=\emptyset$$

以下の空欄に適切なものを次ページの解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

命題「$S\cup T=R$」は $\boxed{\text{エ}}$ である。
命題「$\overline{S}\cap T\subset R$」は $\boxed{\text{オ}}$ である。
命題「$(\overline{S}\cap\overline{T})\cap R=\emptyset$」は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ の解答群

⓪ $\in$	① $\ni$	② $\subset$
③ $\supset$	④ $\cap$	⑤ $\cup$

$\boxed{エ}$ ～ $\boxed{カ}$ の解答群

⓪ 偽	① 真

（〔Ⅱ〕の問題は続く）

(2) 実数x, yに関する条件について，以下の空欄に適切なものを解答群から選べ。同じものを何回選んでもよい。

条件pを

$$y \geqq x^2 + 3x + 2$$

とし，条件qを

$$y \leqq -x^2 + 9$$

とする。pであることは，qであるための $\boxed{キ}$ 。

条件rを

$$y \leqq -2x^2 + 3x + 5$$

とする。qであることは，rであるための $\boxed{ク}$ 。

条件sを

$$y = 3x + 3 \text{ かつ } -1 \leqq x \leqq 1$$

とする。sであることは，pかつrであるための $\boxed{ケ}$ 。

$\boxed{キ}$ ～ $\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ 必要条件でも十分条件でもない
① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である

(計　算　用　紙)

〔Ⅲ〕

一般項が，

$$a_n = \frac{36}{7} + \frac{48}{7} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n$$

で表される数列 $\{a_n\}$，および，一般項が，

$$b_n = 48 - 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

で表される数列 $\{b_n\}$ に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1 = \boxed{ア}$，$b_1 = \boxed{イ}$ である。n を自然数とするとき，

$$a_{n+1} = a_n - \boxed{ウエ} \cdot \left(-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)^n$$

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{キク} \cdot \left(\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\right)^n$$

である。

(2)　x 座標が a_n，y 座標が b_n である点を $P_n(a_n,\ b_n)$ とする。P_n と P_{n+1} の距離を ℓ_n とするとき，

$$\ell_n = \boxed{サシ} \cdot \left(\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)^n$$

である。このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n = \boxed{ソタ}$$

である。

（計　算　用　紙）

〔Ⅳ〕

次の連立不等式の表す xy 平面上の領域を A とする。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_2(-2x+14)-\log_{\frac{1}{4}}(x+1)>\log_4(2y^2) & \cdots\text{(a)} \\ 4^y>2^{-2x+8} & \cdots\text{(b)} \end{cases}$$

(1) (a)について考える。

対数の真数は正の数だから，$\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ である。

底の変換公式から，

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\log_2(x+1)$$

$$\log_4(2y^2)=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\log_2(2y^2)$$

である。したがって，

$$\boxed{\text{ケ}}<y^2<-x^2+\boxed{\text{コ}}\,x+\boxed{\text{サ}}$$

である。

（〔Ⅳ〕の問題は続く）

（計　算　用　紙）

(2)　t を実数とする。

点 $(2,\ t)$ が A に含まれるのは，$\boxed{\text{シ}} < t < \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ のときである。

(3)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ のうち，x，y がともに整数である点を格子点という。

u を整数とするとき，格子点 $(2,\ u)$ が A に含まれるのは，$u = \boxed{\text{ソ}}$ のときである。領域 A に含まれる格子点の個数は，$\boxed{\text{タチ}}$ 個である。

(4)　領域 A に含まれる格子点のうち，$x + 2y$ の値を最大にする点の座標は，$\left(\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$ である。

(計　算　用　紙)

〔V〕

コンピュータを使うと足し算や掛け算などの計算ができる。しかし，コンピュータの内部では，人間とは違う計算方法を用いている。コンピュータの内部では，数は2進法で表される。

以下では，2進法で表した数は，その数の右下に $_{(2)}$ と記す。たとえば，10が2進法で表した数のときには $10_{(2)}$ と記す。$10_{(2)}$ は，10進法で表すと2であるから $10_{(2)} = 2$ である。

(1)　2進法で表したとき8桁となる最大の整数を，10進法で表すと $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

$l(x)$ と $r(x)$ を以下のように定める。

- 負でない整数 x を2進法で表し，その数字の並びの右側に0をひとつ付け加えてできる数を $l(x)$ で表す。たとえば，$x = 1101_{(2)}$ のとき，$l(x) = 11010_{(2)}$ である。
- 負でない整数 x を2進法で表し，その数字の並びの右はしにある数字を取り除いてできる数を $r(x)$ で表す。たとえば $x = 1101_{(2)}$ のとき，$r(x) = 110_{(2)}$ である。ただし，$x = 0_{(2)}$ または $x = 1_{(2)}$ のときは，$r(x) = 0_{(2)}$ とする。

(2)　$x = 101001_{(2)}$ のとき，$l(l(x))$ を10進法で表すと $\boxed{\text{エオカ}}$ である。

(3)　$x = 35$ のとき，$r(x)$ を10進法で表すと $\boxed{\text{キク}}$ である。

(〔V〕の問題は続く)

(計　算　用　紙)

負でない整数 a, b, c の組 $(a,\ b,\ c)$ が与えられたとき，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次の規則で定める。

(イ)　$a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$

(ロ)　a_i, b_i, $c_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots)$ が定められているとき，b_i が偶数ならば，

$$a_{i+1} = l(a_i),\ \ b_{i+1} = r(b_i),\ \ c_{i+1} = c_i$$

とし，b_i が奇数ならば，

$$a_{i+1} = l(a_i),\ \ b_{i+1} = r(b_i),\ \ c_{i+1} = a_i + c_i$$

とする。

(4)　$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 0)$ に対して，(イ)，(ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする。

$$a_2 = \boxed{\text{ケ}},\ \ b_2 = \boxed{\text{コ}},\ \ c_2 = \boxed{\text{サ}}$$

である。

(5)　$(a,\ b,\ c) = (10,\ 5,\ 0)$ に対して，(イ)，(ロ)の規則で定められた数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする。$b_n = 0$ となる整数 n でもっとも小さいものは，$n = \boxed{\text{シ}}$ である。

このとき，$c_n = \boxed{\text{スセ}}$ である。

（〔V〕の問題は続く）

(6)　x，yを負でない整数とする。

$(a,\ b,\ c)=(x,\ y,\ 0)$に対して，(イ)，(ロ)の規則で定められた数列を$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$とするとき，$b_n=0$となる整数nのうちで，もっとも小さいものをNとする。

整数x，yが，$0 \leqq x \leqq 9$，$0 \leqq y \leqq 9$を満たすときの，Nの最大値は $\boxed{ソ}$ である。

(7)　x，yを負でない整数とする。

$(a,\ b,\ c)=(x,\ y,\ 0)$に対して，(イ)，(ロ)の規則で定められた数列を$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$とするとき，$b_n=0$となる整数nのうちで，もっとも小さいものをNとする。

また，$(a,\ b,\ c)=(y,\ x,\ 0)$に対して，(イ)，(ロ)の規則で定められた数列を$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$とするとき，$b_m=0$となる整数mのうちで，もっとも小さいものをMとする。このとき，$\boxed{タ}$。

ただし，$\boxed{タ}$ については，適切なものを解答群から選べ。

$\boxed{タ}$ の解答群

⓪　すべてのx，yに対して，$M=N$である

①　すべてのx，yに対して，$M<N$である

②　すべてのx，yに対して，$M>N$である

③　$M \leqq N$となるx，yも，$M>N$となるx，yも存在する

〔Ⅵ〕

Oを原点とする座標空間に，点A(0，1，0)，Q(2，0，0)がある。xy平面をαとする。α上の，Aを中心とする半径1の円をCとする。点PはCの上にあるとし，Pの座標をP(p_1，p_2，0)とする。

α上の点R(r_1，r_2，0)は，

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \quad \cdots (a)$$

および

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \cdots (b)$$

を満たすとする。ただし$r_2 > p_2$とする。

(1) (a)より $\boxed{ア}$ となる。また，(b)より $\boxed{イ}$ となる。

Pの座標がP(−1，1，0)のとき，Rの座標は，R$\left(\boxed{ウ}, \boxed{エ}, 0\right)$である。

ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ については，適切なものを解答群から選べ。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ の解答群

⓪ $(2 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 0$

① $(1 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 0$

② $(2 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 1$

③ $(1 - p_1)(r_1 - p_1) - p_2(r_2 - p_2) = 1$

④ $p_1^2 + p_2^2 = r_1^2 + r_2^2$

⑤ $p_1^2 + p_2^2 + 1 = r_1^2 + r_2^2$

⑥ $(2 - p_1)^2 + p_2^2 = (r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2$

⑦ $(1 - p_1)^2 + p_2^2 = (r_1 - p_1)^2 + (r_2 - p_2)^2$

(〔Ⅵ〕の問題は続く)

(計　算　用　紙)

(2)　xy 平面上の点 B は，$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AQ}$ および $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AQ}|$ を満たすとする。B の座標は，$B\left(\boxed{オ},\ \boxed{カ},\ 0\right)$ である。ただし $\boxed{オ} > 0$ とする。

(3)　$P(p_1,\ p_2,\ 0)$ を C 上の点とする。$R(r_1,\ r_2,\ 0)$ を 24 ページの(a)および(b)を満たす点とする。ただし $r_2 > p_2$ とする。三角形 PQR と三角形 AQB は相似である。

P が直線 AQ 上にあるとき，R は直線 BQ 上にある。また，P が直線 AQ 上にないとき，$\boxed{キ}$ から，

$$\boxed{ク}\ |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BR}| \text{ および } \angle PAQ = \angle RBQ$$

が成り立つ。

したがって，点 P が C 上を動くときの点 R の軌跡は，点 B を中心とし半径 $\boxed{ク}$ の xy 平面上の円である。

ただし，$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ については，適切なものを解答群から選べ。

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪　三角形 APQ は直角三角形である
①　三角形 BRQ は直角三角形である
②　三角形 APQ と三角形 BRQ は相似である
③　三角形 APQ の面積と三角形 BRQ の面積は等しい

$\boxed{ク}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	② $\dfrac{1}{3}$	③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$	⑤ 2	⑥ 3	⑦ π
⑧ $\sqrt{5}$	⑨ 2π		

（〔VI〕の問題は続く）

（計　算　用　紙）

(4)　s を $-1 < s < 1$ を満たす実数とする。

点 $Q'(2, 0, s)$ を通り，z 軸に垂直な平面を α' とする。点 $A(0, 1, 0)$ を中心とする半径1の球面と，α' が交わってできる円を C' とする。C' の半径は，

$\sqrt{\boxed{ケ} - s^2}$ である。

点 P' は C' 上にあるとし，P' の座標を $P'(p'_1, p'_2, s)$ とする。α' 上の点 $R'(r'_1, r'_2, s)$ は，

$$\overrightarrow{P'Q'} \perp \overrightarrow{P'R'} \text{ および } |\overrightarrow{P'Q'}| = |\overrightarrow{P'R'}|$$

を満たすとする。ただし，$r_2' > p_2'$ とする。

P' が C' 上を動くときの，R' の軌跡は円であり，軌跡が囲む α' の部分の面積を $S(s)$ とすると，

$$S(s) = \boxed{コ}\left(\boxed{サ} - s^2\right)\pi$$

である。

$$\int_{-1}^{1} S(s)\,ds = \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi$$

である。

（以　上）

(計　算　用　紙)

（計　算　用　紙）

(計　算　用　紙)

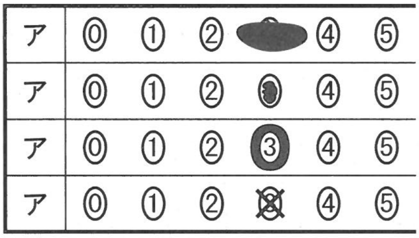
記入上の注意

マークシート解答は，鉛筆でマークしたものを機械が直接読みとって採点する。したがって解答はHBの黒鉛筆でマークすること(万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを使用しないこと)。

① 記入例 **ア**の解答を3にマークする場合。

正しいマークの例

悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしないこと。

枠全体をマークするようにしなさい。

○でかこんでマークしないこと。

×を書いてマークしないこと。

② 解答を訂正する場合は，消しゴムでよく消してから，あらためてマークすること。

③ 解答用紙をよごしたり，折りまげたりしないこと。

④ 問題に指定された数よりも多くマークしないこと。