2018年度入学試験問題

デザイン工学部A方式Ⅰ日程・理工学部A方式Ⅰ日程
生命科学部A方式Ⅰ日程
2 限 数 学 (90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっています。問題に指示されている通りに解答しなさい。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としないので注意すること。
4. 問題文は4ページから26ページまでとなっています。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1) 解答上の注意

問題文中の ア，イ，ウ，… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または0～9までの数が1つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続きます。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生は，〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕〔Ⅲ〕〔Ⅳ〕〔Ⅴ〕を解答せよ。

デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生は，〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕〔Ⅲ〕〔Ⅵ〕〔Ⅶ〕を解答せよ。

〔Ⅰ〕

(1)　xy 平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。m，n を正の整数とする。x 座標 m および y 座標 n が

$$7m + n = 100 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす格子点 $(m,\ n)$ の個数は，$\boxed{アイ}$ である。

①を満たす格子点 $(m,\ n)$ の，x 座標 m と y 座標 n の積 mn は，

$$mn = \boxed{ウエオ}\,m - \boxed{カ}\,m^2$$

である。mn が最大となるのは，$m = \boxed{キ}$，$n = \boxed{クケ}$ のときである。

また，

$$\sum_{m=1}^{\boxed{アイ}} \left(\boxed{ウエオ}\,m - \boxed{カ}\,m^2 \right) = \boxed{コサシス}$$

である。

（〔Ⅰ〕の問題は次ページに続く。）

(2)　i を虚数単位とする。

方程式

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$$

の解を α, β, γ とする。ただし，α は実数とし，β と γ は虚数で，β の虚部は，γ の虚部より小さいとする。このとき，

$$\alpha = \boxed{セ}, \quad \beta = \boxed{ソ} - \boxed{タ}\,i, \quad \gamma = \boxed{チ} + \boxed{ツ}\,i$$

であり，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \boxed{テト}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}$$

である。

〔Ⅱ〕

座標平面上に，原点Oを中心とする半径4の円 C がある。点 $(4,\ 0)$ をA，点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ をBとする。C 上に点Pがある。Pの y 座標は0以上であり，$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ とおくと，$\dfrac{\pi}{6} < \theta \leqq \pi$ である。

Pの座標は，P$\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta,\ \boxed{\text{ア}}\sin\theta\right)$ である。

（〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。）

(1) 三角形 OBP の面積を S とする。$\angle BOP = \theta -$ $\boxed{イ}$ であるから,

$$S = \boxed{ウ} \sin\left(\theta - \boxed{イ}\right)$$

である。

ただし, $\boxed{イ}$ については, 以下の A 群の ㊀～⑨ から 1 つを選べ。

A 群

㊀ $\dfrac{\pi}{6}$	⓪ $\dfrac{\pi}{5}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$
③ $\dfrac{\pi}{2}$	④ $\dfrac{2}{3}\pi$	⑤ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑥ $\dfrac{4}{5}\pi$
⑦ $\dfrac{6}{7}\pi$	⑧ $\dfrac{7}{8}\pi$	⑨ π	

S が最大となるのは, $\theta =$ $\boxed{エ}$ のときである。

ただし, $\boxed{エ}$ については, 上の A 群の ㊀～⑨ から 1 つを選べ。

(〔II〕の問題は次ページに続く。)

(2) 点 $\left(2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right),\ 2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ を Q とする。

$BQ^2+QP^2+PB^2$ が最大となる θ の値を求めよう。

三角形 OBQ に余弦定理を用い，さらに 2 倍角の公式を用いると，

$$BQ^2 = \boxed{オ} - \boxed{カ}\cos^2\left(\theta - \boxed{イ}\right)$$

となる。また，

$$QP^2 = \boxed{キク} - \boxed{ケコ}\cos\left(\theta - \boxed{イ}\right)$$

である。

（〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。）

$\cos\left(\theta - \boxed{\text{イ}}\right) = X$ とおくと，

$$BQ^2 + QP^2 + PB^2 = -\boxed{\text{サ}}X^2 - \boxed{\text{シス}}X + \boxed{\text{セソ}}$$

となる。

X のとり得る値の範囲に注意すると，$BQ^2 + QP^2 + PB^2$ が最大となるのは，

$X = \dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときであり，そのときの θ の値は，$\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{テ}}$ については，7ページのA群の ⊖〜⑨ から1つを選べ。

〔Ⅲ〕

平面上に三角形OABがある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=16,\quad \vec{b}\cdot\vec{b}=18,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=12$$

である。

$$\cos\angle AOB=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\text{ であり，} AB=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}\text{ である。}$$

辺ABの中点をMとし，Mを通りABに垂直な直線をℓとする。ℓと直線OAの交点をCとする。sを実数として，$\overrightarrow{OC}=s\vec{a}$とおくと，

$$\overrightarrow{CM}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$$

である。

ただし，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ については，以下のA群の ⊖～⑨ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

A群

⊖ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⓪ $\dfrac{1}{3}$	① $\dfrac{2}{3}$	② $\dfrac{1}{2}$
③ $\dfrac{\sqrt{2}+2s}{2}$	④ $\dfrac{1+3s}{3}$	⑤ $\dfrac{1-3s}{3}$	⑥ $\dfrac{3s-1}{3}$
⑦ $\dfrac{1+2s}{2}$	⑧ $\dfrac{1-2s}{2}$	⑨ $\dfrac{2s-1}{2}$	

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

直線 CM と AB が垂直であることから，$s = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ となる。

三角形 COM の面積を S_1 とし，三角形 CAM の面積を S_2 とするとき，

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

三角形OABの外心をEとする。tを実数として，$\overrightarrow{CE} = t\,\overrightarrow{CM}$とおくと，

$$\overrightarrow{OE} = \boxed{シ}\,\vec{a} + \boxed{ス}\,\vec{b}$$

である。

ただし，$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$については，以下のB群の㊀～⑨からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

B群

㊀ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$　　⓪ $\dfrac{t}{3}$　　① $\dfrac{2}{3}t$　　② $\dfrac{t}{2}$

③ $\dfrac{1+t}{4}$　　④ $\dfrac{2+3t}{3}$　　⑤ $\dfrac{3t-2}{3}$　　⑥ $\dfrac{4+3t}{3}$

⑦ $\dfrac{2+3t}{4}$　　⑧ $\dfrac{3t-1}{4}$　　⑨ $\dfrac{5+3t}{4}$

$t = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$である。

$\overrightarrow{EM} = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\vec{b}$であり，$EM = \dfrac{\sqrt{\boxed{トナ}}}{\boxed{ニ}}$である。

（計　算　用　紙）

次の問題〔Ⅳ〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅳ〕

関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

とし，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，

$$f'(x) = \boxed{ア}\,x^2 - \boxed{イ}$$

である。$f'(x) = 0$ を満たす x の値を a，b とする。ただし，$a < b$ とする。

$a = \boxed{ウエ}$，$b = \boxed{オ}$ である。

$a < x < b$ において，$f(x)$ は $\boxed{カ}$ する。

ただし，$\boxed{カ}$ については，以下のA群の ①〜④ から1つを選べ。

A群

① つねに増加　　② 増加したのち，減少

③ つねに減少　　④ 減少したのち，増加

（〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。）

$f(a)$ は，$f(x)$ の $\boxed{キ}$ 。

ただし，$\boxed{キ}$ については，以下のB群の①〜⑤から1つを選べ。

B群

① 極大値であり，最大値でもある

② 極大値であるが，最大値ではない

③ 極小値であり，最小値でもある

④ 極小値であるが，最小値ではない

⑤ 極値ではない

C と x 軸の共有点の個数は，$\boxed{ク}$ である。

(〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。)

C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ における，C の接線を ℓ とする。ℓ の方程式は，

$$y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。C と ℓ で囲まれた部分の面積は，

$$\int_{\boxed{\text{スセ}}}^{\frac{1}{2}} \left\{ f(x) - \left(\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right) \right\} dx = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{64}$$

である。

（計　算　用　紙）

次の問題〔V〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

9個の玉があり，それぞれの玉には，自然数1，2，…，9のいずれか1つが書かれている。また，それぞれの自然数が書かれた玉は1個ずつである。

(1) 白い袋と赤い袋と青い袋がそれぞれ1つずつあり，9個の玉を，これらの3つの袋に分けて入れるとする。

どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は $\boxed{\text{アイウエ}}$ 通りある。

(2) 区別のつかない3つの袋があり，9個の玉を，これら3つの袋に分けて入れるとする。

(i) どの袋にも3個の玉が入るような玉の入れ方は $\boxed{\text{オカキ}}$ 通りある。

(ii) 3つの袋のうち，2つの袋にはそれぞれ2個の玉が，1つの袋には5個の玉が入るような玉の入れ方は $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りある。

(iii) どの袋にも2個以上の玉が入るような玉の入れ方は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 通りある。

（〔V〕の問題は次ページに続く。）

(3) 区別のつかない2つの袋がある。一方の袋には，9個の玉のうち，奇数が書かれている玉のすべてが入っていて，もう一方の袋には，9個の玉のうち，偶数が書かれている玉のすべてが入っている。

どちらか一方の袋を選び，選んだ袋の中から2個の玉を同時に取り出す。

(i) 取り出した玉に書かれている自然数がともに奇数で，それらの和が3の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(ii) 取り出した玉に書かれている自然数の和が3の倍数であったとき，それらの自然数がともに奇数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

次の問題〔VI〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔VI〕

関数$f(x)$を，

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

とし，座標平面上の曲線$y = f(x)$をCとする。

$f(x)$の導関数$f'(x)$は，

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\,x^{\boxed{\text{ウ}}}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1)$$

である。$f(x)$は，$x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$において極大値$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$をとる。

（〔VI〕の問題は次ページに続く。）

直線 $y = x$ を ℓ とする。

$$x - f(x) = \frac{x^{\boxed{ク}}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

であるから，$0 < x < 1$ において，$x - f(x)$ の値は $\boxed{ケ}$ 。

ただし，$\boxed{ケ}$ については，以下のA群の ①〜④ から1つを選べ。

A群

① つねに正である　　② つねに負である

③ 正から負に変わる　　④ 負から正に変わる

(〔VI〕の問題は次ページに続く。)

直線 m は，C の接線であり，ℓ と垂直であるとする。m と C の接点の x 座標

を a とすると，$a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求める。$1 - x^2 = t$ とおいて置換積分を行うと，

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \boxed{\text{シ}}\,dt = \frac{\boxed{\text{ス}}\,(1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}}}{\boxed{\text{タ}}} + D$$

となる。ここで，D は積分定数である。

ただし，$\boxed{\text{シ}}$ については，以下のB群の ㊀～⑨ から1つを選べ。

B群

㊀ $\dfrac{1}{t}$　　⓪ $\dfrac{1}{t^2}$　　① t　　② t^2

③ $\sqrt{t}$　　④ $\sqrt{1-t^2}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{t}}{2}$　　⑥ $\dfrac{t\sqrt{t}}{3}$

⑦ $\dfrac{-\sqrt{t}}{2}$　　⑧ $\dfrac{-t\sqrt{t}}{3}$　　⑨ $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

(〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。)

C と ℓ，および直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積は，$\dfrac{1}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

次の問題〔Ⅶ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅶ〕

e を自然対数の底とし，対数は自然対数とする。

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x(\log x)^2 = 0$ であることを用いてもよい。

関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = x(\log x)^2 \quad (x > 0)$$

とし，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。

C と x 軸の共有点は，$\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$ のみである。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，

$$f'(x) = (\log x)^{\boxed{\text{イ}}} + \boxed{\text{ウ}}\log x$$

であり，$f'(x) = 0$ となる x の値は，大きい順に，$\boxed{\text{エ}}$，$e^{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

$k = f\left(e^{\boxed{\text{オカ}}}\right)$ とする。方程式 $f(x) = k$ の解の個数は，$\boxed{\text{キ}}$ である。

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

$f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ は，

$$f''(x) = \frac{\boxed{ク}}{x}\left(\log x + \boxed{ケ}\right)$$

である。$f''(x) = 0$ となる x の値は，$e^{\boxed{コサ}}$ である。$x > e^{\boxed{コサ}}$ において，C は $\boxed{シ}$ 。

ただし，$\boxed{シ}$ については，以下のA群の①～④から1つを選べ。

A群

① 上に凸(とつ)である　　② 下に凸である

③ 変曲点をちょうど1つもつ　　④ 変曲点をちょうど2つもつ

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

定積分

$$I = \int_e^{\boxed{ア}} f(x)\,dx$$

の値を求める。x が $\dfrac{x^2}{2}$ の導関数であることに注意して部分積分を行うと，

$$I = -\frac{e^{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}} - \int_e^{\boxed{ア}} \boxed{タ}\,dx$$

である。

ただし，$\boxed{タ}$ については，以下のB群の ①〜⑧ から1つを選べ。

B群

① $\log x$　② $(\log x)^2$　③ $x \log x$　④ $x(\log x)^2$

⑤ $\dfrac{\log x}{x}$　⑥ $\dfrac{(\log x)^2}{x}$　⑦ $\dfrac{\log x}{2}$　⑧ $\dfrac{(\log x)^2}{2}$

$$I = \frac{1}{\boxed{チ}}\left(1 - \boxed{ツ}\, e^{\boxed{スセ}}\right)$$

となる。

(以　上)

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HBの黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしてはいけません。

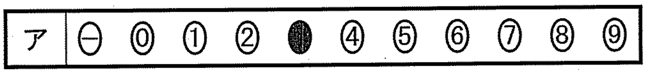
② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。

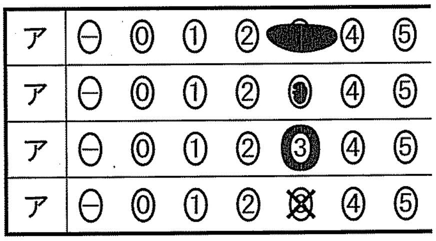
④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしてはいけません。

⑤ アの解答を3にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例



悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしてはいけません。

枠全体をマークしなさい。

○でかこんでマークしてはいけません。

×を書いてマークしてはいけません。

6. 問題冊子のページを切り離さないこと。