2016 年度入学試験問題　211

デザイン工学部Ａ方式Ⅰ日程・理工学部Ａ方式Ⅰ日程
生命科学部Ａ方式Ⅰ日程
2　限　数　　学　(90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっています。問題に指示されている通りに解答しなさい。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としないので注意すること。
4. 問題文は 4 ページから 19 ページまでとなっています。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1)　解答上の注意

問題文中の ア，イ，ウ,… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または 0 ～ 9 までの数が 1 つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続きます。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

〔Ⅰ〕

(1) ある数が，二進法で表された数であることを示すために，たとえば $1010_{(2)}$ のように，右下に (2) をつけて表す。また，ある数が，五進法で表された数であることを示すために，右下に (5) をつけて表す。

二進法で表された数 $1101001_{(2)}$ を十進法で表すと， $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

十進法で表された数 29 を五進法で表すと， $\boxed{\text{エオカ}}_{(5)}$ である。

(2) 792 を素因数分解すると，$792 = \boxed{\text{キ}}^{\boxed{\text{ク}}} \times \boxed{\text{ケ}}^{\boxed{\text{コ}}} \times \boxed{\text{サシ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ケ}} < \boxed{\text{サシ}}$ とする。

792 の約数の個数は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

k を 2 桁(けた)の正の整数とする。$792k$ が，ある正の整数の平方となるとき，$k = \boxed{\text{ソタ}}$， $\boxed{\text{チツ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ソタ}} < \boxed{\text{チツ}}$ とする。

(3) i を虚数(きょすう)単位とする。

複素数 $\dfrac{5i}{3+4i}$ の実部は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり，虚部は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

〔Ⅱ〕

(1)　θを実数とする。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$の両辺を2乗して，2倍角の公式を用いると，

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\boxed{ア}-\frac{\sin^{\boxed{イ}}\left(\boxed{ウ}\,\theta\right)}{\boxed{エ}}$$

となる。また，

$$\sin^8\theta+\cos^8\theta=\boxed{オ}-\sin^{\boxed{カ}}\left(\boxed{ウ}\,\theta\right)+\frac{\sin^{\boxed{キ}}\left(\boxed{ウ}\,\theta\right)}{\boxed{ク}}$$

となる。

(2)　a，bを正の実数とする。

$$X=\frac{(a+b)^4}{a^4+b^4}$$

とおいて，Xの最大値を求めよう。

$0<\dfrac{a}{a+b}<1$であるから，$\dfrac{a}{a+b}$を，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たす実数θを用いて，$\dfrac{a}{a+b}=\sin^2\theta$とする。$\dfrac{b}{a+b}=\boxed{ケ}$である。

ただし，$\boxed{ケ}$については，以下のA群の①～⑨から1つを選べ。

A群

①　$\sin\theta$	②　$\cos\theta$	③　$\tan\theta$
④　$\sin^2\theta$	⑤　$\cos^2\theta$	⑥　$\tan^2\theta$
⑦　$\sin 2\theta$	⑧　$\cos 2\theta$	⑨　$\tan 2\theta$

(〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。)

$\sin\left(\boxed{ウ}\,\theta\right)=t$ とおく。t のとり得る値の範囲は，$\boxed{コ}<t\leqq\boxed{サ}$ である。X は，t を用いて，

$$X=\frac{\boxed{シ}}{t^{\boxed{ス}}-\boxed{セ}\,t^{\boxed{ソ}}+\boxed{タ}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{ⓘ}$$

と表すことができる。ⓘ の右辺の分母は，$t=\boxed{チ}$ のとき最小値 $\boxed{ツ}$ をとるから，X の最大値は $\boxed{テ}$ である。

〔Ⅲ〕

四面体 OABC は，辺の長さが，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 2, \quad \mathrm{AC} = \sqrt{6}, \quad \mathrm{OC} = 2\sqrt{2}$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{ア}}$$

である。三角形 OBC は直角三角形で，

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{イ}}$$

である。三角形 OAC に余弦定理を用いると，

$$\cos \angle \mathrm{AOC} = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{カ}}$$

である。

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

3点O，A，Bを通る平面を α とする。点Cを通り，α に直交する直線と，α の交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，実数 x，y を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表すと，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 4x + \boxed{\text{キ}}\,y - \boxed{\text{ク}}$$
$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boxed{\text{ケ}}\,x + 4y - \boxed{\text{コ}}$$

となる。また，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boxed{\text{サ}}$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boxed{\text{シ}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{b}$$

となる。

直線ADと直線OBの交点をEとし，三角形OABの面積を S_1，三角形ABEの面積を S_2 とすると，

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

次の問題〔Ⅳ〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅳ〕

p，q，r を実数とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

とし，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。C は原点を通り，原点における C の接線 ℓ の傾きは -9 である。また，C 上の点 $\mathrm{P}(2,\ f(2))$ における C の接線 m は，ℓ と平行である。

$$p = \boxed{アイ},\quad q = \boxed{ウエ},\quad r = \boxed{オ}$$

である。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の値が 0 になるのは，$x = \boxed{カキ}$，$\boxed{ク}$ のときである。$x < \boxed{カキ}$ において $f'(x)\ \boxed{ケ}\ 0$ であり，$\boxed{カキ} < x < \boxed{ク}$ において $f'(x)\ \boxed{コ}\ 0$ である。

ただし，$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ については，以下のA群の ①～③ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

A群

① $<$　　　② $=$　　　③ $>$

（〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。）

よって，$f\left(\boxed{\text{カキ}}\right)$ は，$f(x)$ の $\boxed{\text{サ}}$ 。

ただし，$\boxed{\text{サ}}$ については，以下のB群の ①〜③ から1つを選べ。

B群

① 極小値である　　② 極大値である　　③ 極値ではない

接線 m の方程式は，

$$y=-9x-\boxed{\text{シ}}$$

である。

C と m の，P以外の共有点の x 座標は，$\boxed{\text{スセ}}$ である。

C と m とで囲まれた部分の面積は，$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

次の問題〔V〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

$f(x)=x^3$ とし，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。

(1) $x>0$ のとき，$f(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ 。

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ については，以下のA群の ①～④ から1つを選べ。

A群

① つねに増加する

② つねに減少する

③ 増加したのち，減少する

④ 減少したのち，増加する

(2) $a_1=2$ とし，点 $(a_1,\ 0)$ を P_1，点 $(a_1,\ f(a_1))$ を Q_1 とする。Q_1 における C の接線を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点 $(a_2,\ 0)$ を P_2 とする。

ℓ の方程式は，$y=\boxed{\text{イウ}}\,x-\boxed{\text{エオ}}$ であり，$a_2=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

次に，

点 $(a_2,\ f(a_2))$ を Q_2 とし，Q_2 における C の接線と x 軸の交点 $(a_3,\ 0)$ を P_3 とする。

この操作をくり返して，点列 $\{P_n\}$ と点列 $\{Q_n\}$，および数列 $\{a_n\}$ を定める。

（〔V〕の問題は次ページに続く。）

$n \geqq 1$ のとき，点 $Q_n(a_n, f(a_n))$ における C の接線の方程式は，
$y = \boxed{ク}\,x - \boxed{ケ}$ である。

ただし，$\boxed{ク}$，$\boxed{ケ}$ については，以下のB群の ㊀〜⑨ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

B群

㊀ a_n	⓪ $(a_n)^2$	① $(a_n)^3$	② $(a_n)^4$
③ $2a_n$	④ $2(a_n)^2$	⑤ $2(a_n)^3$	⑥ $2(a_n)^4$
⑦ $3(a_n)^2$	⑧ $3(a_n)^3$	⑨ $3(a_n)^4$	

$y = \boxed{ク}\,x - \boxed{ケ}$ と x 軸の交点の x 座標 a_{n+1} は，

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}a_n$$

である。

C と x 軸，および2直線 $x = a_{n+1}$，$x = a_n$ で囲まれた部分の面積を I_n とする。

$$I_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)\,dx = \frac{\boxed{シス}}{324}(a_n)^{\boxed{セ}}$$

である。

三角形 $P_nP_{n+1}Q_n$ の面積を S_n とする。

$$\frac{S_n}{I_n} = \frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{シス}}$$

である。

次の問題〔Ⅵ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅵ〕

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

とする。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(0) = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \boxed{ウ}$，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{エ}$ である。

(2)　$f(x)$ は，$\boxed{オ}$。

ただし，$\boxed{オ}$ については，以下のＡ群の①～④から１つを選べ。

Ａ群

①　つねに正の値をとり，つねに増加する

②　つねに正の値をとり，つねに減少する

③　つねに負の値をとり，つねに増加する

④　つねに負の値をとり，つねに減少する

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

$f(x)$ の導関数を $f'(x)$，$f(x)$ の第２次導関数を $f''(x)$ とすると，

$$f''(x) = \frac{\boxed{カ}\left(e^x - \boxed{キ}\right)}{(1+e^x)^{\boxed{ク}}}$$

である。

ただし，$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ については，以下のＢ群の㊀〜⑨からそれぞれ１つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

Ｂ群

㊀ e^{x-1}	⓪ e^x	① 1	② 2
③ e^{x+1}	④ e^{-x-1}	⑤ e^{-x+1}	⑥ e^{2x-1}
⑦ e^{2x}	⑧ e^{2x+1}	⑨ e^{-2x-1}	

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

$f''(x) = 0$ となるのは，$x =$ $\boxed{ケ}$ のときである。$x <$ $\boxed{ケ}$ において $f''(x)$ $\boxed{コ}$ 0 であり，$x >$ $\boxed{ケ}$ において $f''(x)$ $\boxed{サ}$ 0 である。

ただし，$\boxed{コ}$，$\boxed{サ}$ については，以下のＣ群の ①～③ からそれぞれ１つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

Ｃ群

① $<$　　　② $=$　　　③ $>$

a を正の実数とする。$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$ とする。$g(x)$ の導関数を $g'(x)$，$g(x)$ の第２次導関数を $g''(x)$ とする。

$g(a) = 0$ であり，$g'(a)$ $\boxed{シ}$ 0 である。

ただし，$\boxed{シ}$ については，上のＣ群の ①～③ から１つを選べ。

$g''(x) = f''(x)$ である。$0 < x < a$ において $g'(x)$ $\boxed{ス}$ 0 であり，$x > a$ において $g'(x)$ $\boxed{セ}$ 0 である。

ただし，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ については，上のＣ群の ①～③ からそれぞれ１つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

よって，$0 < x < a$ において $g(x)$ $\boxed{ソ}$ 0 であり，$x > a$ において $g(x)$ $\boxed{タ}$ 0 である。

ただし，$\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ については，上のＣ群の ①～③ からそれぞれ１つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

次の問題〔Ⅶ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅶ〕

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t （$t \geqq 0$）の関数として

$$\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

により与えられている。点Pが描く曲線を C とする。

$t = 4$ における点Pの座標は $\left(\boxed{アイ},\ \boxed{ウ}\right)$ である。

$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表すと，$\dfrac{dy}{dx} = \boxed{エ}\, t^{\boxed{オ}}$ である。

ただし，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ については，以下のA群の ⓪～⑨ からそれぞれ１つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

A群

⓪ $\frac{1}{4}$	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ $\frac{1}{3}$	⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{3}{2}$	⑨ $\frac{9}{4}$

点Pにおける C の接線が，直線 $y = 2x$ と平行になるのは，$t = \boxed{カキ}$ のときである。

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

$t=0$ から $t=5$ までの間に，点 P が動く道のりを L とすると

$$L = \boxed{\text{ク}} \int_0^5 \sqrt{\boxed{\text{ケ}} + t}\ dt = \left[\left(\boxed{\text{ケ}} + t \right)^{\boxed{\text{コ}}} \right]_0^5$$

となり，

$$L = \boxed{\text{サシ}}$$

である。

ただし，$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ については，前ページのA群の ⓪～⑨ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

曲線 C と直線 $x=10$，および x 軸とで囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となる。

（以　上）

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HB の黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしてはいけません。

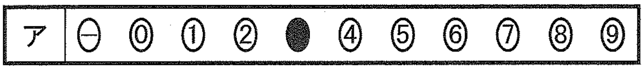
② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。

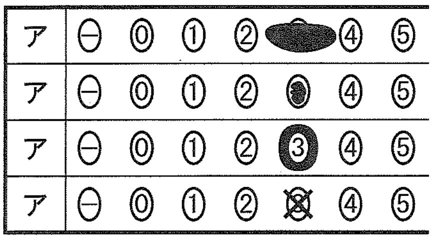
④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしてはいけません。

⑤ **ア**の解答を 3 にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例



悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしてはいけません。

枠全体をマークしなさい。

○でかこんでマークしてはいけません。

×を書いてマークしてはいけません。