2013 年度入学試験問題

デザイン工学部A方式Ⅰ日程・理工学部A方式Ⅰ日程
生命科学部A方式Ⅰ日程

2　限　数　　学　(90 分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。
3. 志望学部・学科によって解答する問題が決まっています。問題に指示されている通りに解答しなさい。指定されていない問題を解答した場合，採点の対象としませんので注意しなさい。
4. 問題文は 4 ページから 19 ページまでとなっています。
5. マークシート解答方法については以下の注意事項を読みなさい。

(1) 解答上の注意

問題文中の ア，イ，ウ，… のそれぞれには，特に指示がないかぎり，－（マイナスの符号），または 0 ～ 9 までの数が 1 つずつ入ります。当てはまるものを選び，マークシートの解答用紙の対応する欄にマークして解答しなさい。

ただし，分数の形で解答が求められているときには，符号は分子に付け，分母・分子をできる限り約分して解答しなさい。

また，根号を含む形で解答が求められているときには，根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。

〔例〕

$\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウエ}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{14}$ と答えたいときには，以下のようにマークしなさい。

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

マークシート解答方法の注意事項は裏表紙に続きます。問題冊子を裏返して読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

〔Ⅰ〕

(1) $A = 3^{50}$ とおくとき，A の桁(けた)数は $\boxed{\text{アイ}}$ である。ここで，必要ならば $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ であることを用いてもよい。

(2) 5で割ると4余り，4で割ると2余る自然数のうち，最小の数は $\boxed{\text{ウエ}}$，小さい方から2番目の数は $\boxed{\text{オカ}}$，小さい方から m 番目の数は $\boxed{\text{キク}}\,m - \boxed{\text{ケ}}$ である。ただし，m は自然数とする。

(3) 6人を，それぞれ1人，2人，3人からなる3つのグループに分ける分け方は，${}_6C_1 \times {}_{\boxed{\text{コ}}}C_2 = \boxed{\text{サシ}}$ 通りある。

(4) 自然数 n に対して，n^2 を3で割ると1余ることは，n を3で割ると1余るための $\boxed{\text{ス}}$。

ただし，$\boxed{\text{ス}}$ については，以下の⓪～③から1つを選べ。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

（計　算　用　紙）

〔Ⅱ〕

k は，$0<k<1$ を満たす実数であるとする。三角形OABの重心をG，辺OAを $k:(1-k)$ に内分する点をPとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

辺ABの中点をMとおくと，OG：GM＝$\boxed{ア}$：1であり，

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ である。ここで，直線ABと直線GPが平行になるのは，

$k=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のときである。

以下，$k\neq\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ として，2直線ABとGPの交点をQとおく。

(1)

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}-k\right)\vec{a}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{b}$$

である。s を実数として，$\overrightarrow{PQ}=s\overrightarrow{PG}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=\left\{\left(\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}-k\right)s+k\right\}\vec{a}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}s\vec{b}$$

となる。また，t を実数として，$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=\boxed{ク}\,\vec{a}+t\vec{b}$$

である。

ただし，$\boxed{ク}$ については，以下の⓪～⑦から1つを選べ。

⓪ t　　① $(t-1)$　　② $(t-2)$　　③ $(2t-1)$

④ $(1-t)$　　⑤ $(1-2t)$　　⑥ $(2-t)$　　⑦ $t(t-1)$

（〔Ⅱ〕の問題は次ページに続く。）

したがって，$t = \dfrac{k - \boxed{ケ}}{\boxed{コ}k - \boxed{サ}}$ である。

ここで，Q が辺 AB を 5 ： 1 に外分する点であるとき，$t = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であるから，$k = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$ である。

(2) $k = \dfrac{1}{4}$，OA = OB = 1，$\angle \mathrm{POQ} = 90^\circ$ であるとする。$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{チ}$ より，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ である。したがって，三角形 OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニ}}$ であり，三角形 OAQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}$ である。

〔Ⅲ〕

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$ は，角の大きさの単位をラジアンとして，その値を定めることができる。つまり，任意の実数 θ に対して，$\sin\theta$ の値，$\cos\theta$ の値がそれぞれ定まる。したがって，$\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ や $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の値は定まる。ここで，$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ であるから，$\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ である。

θ の関数 $y=\cos\theta$ に $\theta=\sin x$ を代入すると，y を x の関数 $y=\cos(\sin x)$ と考えることができる。ここで，$f(x)=\cos(\sin x)$ とおくと，
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ となる。

同様に，$g(x)=\sin(\cos x)$ とおくと，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。

変数 x は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲を動くとして，$f(x)$，$g(x)$ それぞれの最大値，最小値を求め，大きさの順に並べよう。

(1) $\sin x$ のとりうる値の範囲は $\boxed{ア}\leqq\sin x\leqq\boxed{イ}$ であり，$\sin x=\boxed{ア}$ となる相異なる x の値は，小さい順に $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ については，以下のA群の⓪～④からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

A群

⓪ 0　　① 1　　② $\frac{\pi}{4}$　　③ $\frac{\pi}{2}$　　④ π

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

関数 $\cos\theta$ の値は，$\boxed{ア} \leqq \theta \leqq \boxed{イ}$ の範囲で減少するから，

$f(x) = \cos(\sin x)$ は，$x = \boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ のとき最大値 $\boxed{オ}$ をとり，

$x = \boxed{カ}$ のとき最小値 $\cos\left(\boxed{キ}\right)$ をとる。

ただし，$\boxed{オ}$ ～ $\boxed{キ}$ については，前ページのA群の⓪～④からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

(2) $\cos x$ のとりうる値の範囲は $\boxed{ク} \leqq \cos x \leqq \boxed{ケ}$ であり，関数 $\sin\theta$ の値は，$\boxed{ク} \leqq \theta \leqq \boxed{ケ}$ の範囲で増加する。したがって，$g(x) = \sin(\cos x)$ は，$x = \boxed{コ}$ のとき最大値 $\sin\left(\boxed{サ}\right)$ をとり，$g(x)$ の最小値は $\sin\left(\boxed{シ}\right)$ である。

ただし，$\boxed{ク}$ ～ $\boxed{シ}$ については，以下のB群の⓪～④からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

B群

⓪ 0　　① 1　　② $\dfrac{\pi}{2}$　　③ -1　　④ $-\dfrac{\pi}{2}$

（〔Ⅲ〕の問題は次ページに続く。）

(3) $f(x)$，$g(x)$ それぞれの最大値，最小値の大小関係は，

$$\boxed{\text{ス}} < \boxed{\text{セ}} < \boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}}$$

となる。

ただし，$\boxed{\text{ス}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ については，以下のC群の⓪～③からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものは1回だけ選ぶものとする。

C群

⓪ $\boxed{\text{オ}}$　① $\cos\left(\boxed{\text{キ}}\right)$　② $\sin\left(\boxed{\text{サ}}\right)$　③ $\sin\left(\boxed{\text{シ}}\right)$

（計　算　用　紙）

次の問題〔Ⅳ〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科生命機能学専修のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅳ〕

座標平面上の放物線

$$y = 1 - \frac{x^2}{4}$$

を C とする。t を正の実数とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ 1 - \frac{t^2}{4}\right)$ における，C の接線を ℓ，法線を ℓ' とする。

(1) ℓ の傾きは $\boxed{ア}$ であり，y 切片は $\boxed{イ}$ である。また，ℓ' の傾きは $\boxed{ウ}$ であり，y 切片は $\boxed{エ}$ である。一方，ℓ' と C の，Pと異なる交点の x 座標は $\boxed{オ}$ である。

ただし，$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{オ}$ については，以下の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ $\frac{t}{2}$　① $-\frac{t}{2}$　② $\frac{2}{t}$　③ $-\frac{2}{t}$

④ $t - \frac{8}{t}$　⑤ $-t - \frac{8}{t}$　⑥ $1 + \frac{t^2}{4}$　⑦ $1 - \frac{t^2}{4}$

⑧ $-1 + \frac{t^2}{4}$　⑨ $-1 - \frac{t^2}{4}$

（〔Ⅳ〕の問題は次ページに続く。）

(2) ℓ と x 軸の交点の x 座標を u とおく。u は t の関数であり，$t=$ $\boxed{カ}$ のとき最小値 $\boxed{キ}$ をとる。

また，ℓ' と x 軸の交点の x 座標を v とおくと，v は t の関数である。t が $0<t<2$ の範囲を動くとき，$t-v$ は，$t=\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{ケ}}$ において最大値 $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ をとる。

(3) C を x 軸方向に2だけ平行移動した放物線を C' とする。b，c を定数として，C' を表す2次関数を $y=-\dfrac{x^2}{4}+bx+c$ とおくと，$b=$ $\boxed{ス}$，$c=$ $\boxed{セ}$ である。

2つの放物線 C，C' と y 軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。

次の問題〔V〕は，デザイン工学部システムデザイン学科，生命科学部生命機能学科生命機能学専修のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔V〕

定数 a，b を正の実数とし，$c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ とおく。座標平面上において，半円 $y = \sqrt{4c^2 - (x-c)^2}$ の $x \geqq 0$ の部分を C_1，曲線 $y = ax^2 - bx + 2$ を C_2 とする。

点Pの座標を $(c, 0)$ とし，C_1 の x 軸上の点をQ，C_1 の y 軸上の点をRとおく。

(1) C_1 は中心P，半径 $2c$ の円の一部である。弧QRに対する中心角を考えると，扇形PQRの面積は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。また，三角形PQRの面積は $\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{オ}}$ である。

（〔V〕の問題は次ページに続く。）

(2)　C_2 は Q を通るものとする。このとき，

$$b = \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{カ}} + \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}\,a$$

が成り立つ。

線分 QR と C_2 で囲まれた部分の面積を S とおき，S を a を用いて表すと，

$$S = \boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}\,a$$

である。

次に，S が，C_1 と線分 QR で囲まれた部分の面積に等しいとき，

$$a = \frac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サシ}}\pi - \frac{1}{\boxed{ス}}, \qquad b = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi - \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{カ}}$$

である。

次の問題〔Ⅵ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅵ〕

O を原点とする座標平面上の楕円

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \quad \cdots\cdots ⓘ$$

を C とする。y を x の関数と考えて，ⓘ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{2}x+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}y\cdot y'=0$$

となる。a，b を定数として，C 上の点 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ における C の接線の方程式を $y=ax+b$ とおくとき，$a=$ $\boxed{ウ}$，$b=$ $\boxed{エ}$ である。

ただし，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ については，以下の ⓪～⑨ からそれぞれ 1 つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$　⑦ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑧ $\sqrt{3}$　⑨ $2\sqrt{3}$

（〔Ⅵ〕の問題は次ページに続く。）

傾き $-\dfrac{3}{2}$ の直線 ℓ が C と第1象限で接するとき，ℓ の y 切片は $\boxed{\text{オ}}$ であり，p，q を定数として，接点の座標を (p, q) とおくと，$p = \boxed{\text{カ}}$，$q = \boxed{\text{キ}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ については，前ページの ⓪～⑨ からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

楕円 C が囲む領域で，$-1 \leqq x \leqq p$ を満たす部分の面積を S とおくと，

$$S = 2\int_{-1}^{p} \sqrt{\boxed{\text{ク}}\left(1 - \frac{x^2}{\boxed{\text{ケ}}}\right)}\,dx$$

である。$x = 2\sin\theta$ とおいて置換積分を行うと，

$$S = \boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\,\pi$$

となる。

次の問題〔Ⅶ〕は，デザイン工学部都市環境デザイン工学科，理工学部機械工学科機械工学専修・応用情報工学科のいずれかを志望する受験生のみ解答せよ。

〔Ⅶ〕

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x - 1} \qquad (x \neq 1)$$

とする。

(1) a，b，c を定数として，$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ とおくと，$a =$ $\boxed{ア}$，$b =$ $\boxed{イ}$，$c =$ $\boxed{ウ}$ である。

(2) $f''(x) = \dfrac{\boxed{エ}}{(x-1)^{\boxed{オ}}}$ である。

$f(x)$ は，$x =$ $\boxed{カ}$ において極大値 $\boxed{キ}$ をとり，$x =$ $\boxed{ク}$ において極小値 $\boxed{ケ}$ をとる。

ただし，$\boxed{カ}$ ～ $\boxed{ケ}$ については，以下の⓪～⑨からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　① $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ $2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

④ $2 - \sqrt{3}$　⑤ $2 + \sqrt{3}$　⑥ $8 - 4\sqrt{3}$　⑦ $8 + 4\sqrt{3}$

⑧ $24 - 4\sqrt{3}$　⑨ $24 + 4\sqrt{3}$

（〔Ⅶ〕の問題は次ページに続く。）

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{コ} - \boxed{サ}\log\boxed{シ}$ である。ただし，対数は自然対数とする。

(4) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-1)^{n-1}}$ が収束するのは，$x=\boxed{ス}$ であるか，$x<\boxed{セ}$ または $x>\boxed{ソ}$ のときである。このとき，無限等比級数の和は

$$\frac{\boxed{タ}x^2-\boxed{チ}}{x-\boxed{ツ}}$$ である。

ただし，$\boxed{ス}$ ～ $\boxed{ソ}$ については，以下の⓪～⑧からそれぞれ1つを選べ。ここで，同じものを何回選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$

⑤ -1　⑥ -2　⑦ $-\frac{1}{2}$　⑧ $-\frac{1}{4}$

（以　上）

(2) 記入上の注意

マークシートの解答用紙に解答するときには，以下のことに注意してマークしなさい。

① HBの黒鉛筆を用いてマークしなさい。万年筆，ボールペン，シャープペンシルなどを用いてマークしてはいけません。

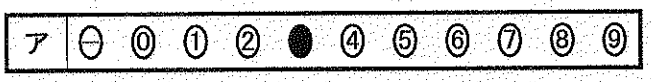
② 解答を訂正する場合には，消しゴムできれいに消してから，あらためてマークしなさい。

③ マークシートの解答用紙を汚したり折りまげたりしてはいけません。

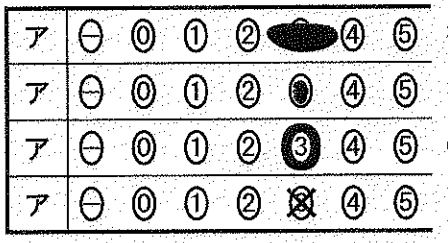
④ 所定欄以外にはマークしたり，記入したりしてはいけません。

⑤ **ア**の解答を3にマークするときには，以下のようにマークしなさい。

正しいマークの例



悪いマークの例



枠外にはみ出してマークしてはいけません。

枠全体をマークしなさい。

○でかこんでマークしてはいけません。

×を書いてマークしてはいけません。