う

数　学　問　題

注意事項

1. この問題冊子は 16 ページあります。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は，２枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
7. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル（いずれも HB・黒）で記入しなさい。
9. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
13. 試験時間は 120 分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{う}}$ に当てはまるもの（数・式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし log は自然対数，また e はその底である。

(1) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_0^{\pi} t f(t)\, dt + \cos x$$

を満たすとき $f(x) = \boxed{\text{あ}} + \cos x$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2) 関数

$$f(x) = \int_x^{x+\log 2} t\, e^{-t}\, dt$$

は $x = \boxed{\text{い}}$ において最大値 $\boxed{\text{う}}$ をとる。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び，その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし log は自然対数である。また空欄 $\boxed{\text{ウ}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，$\boxed{\text{ウエオ}}$ は 3 桁の数を表す。

(1) a は $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす定数，n は自然数とするとき

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \log\left(\cos\frac{a}{n}\right) = \boxed{\text{ア}}$$

である。

アの解答群

⓪ 0　① 1　② a^2　③ $-a^2$　④ $\dfrac{1}{a^2}$

⑤ $-\dfrac{1}{a^2}$　⑥ $\dfrac{a^2}{2}$　⑦ $-\dfrac{a^2}{2}$　⑧ $\dfrac{1}{2a^2}$　⑨ $-\dfrac{1}{2a^2}$

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2)　p は1より大きい定数とする。任意の実数 A, B に対して

$$pA^2 + qB^2 \geqq (A + B)^2$$

が成り立つような最小の正の定数 q は $\boxed{\text{イ}}$ である。

イの解答群

⓪ $p - 1$　　① p　　② $p + 1$

③ $\dfrac{2}{p - 1}$　　④ $\dfrac{4}{p}$　　⑤ $\dfrac{6}{p + 1}$

⑥ $\dfrac{4(p - 1)}{p}$　　⑦ $\dfrac{6(p - 1)}{p + 1}$　　⑧ $\dfrac{p}{p - 1}$

⑨ $\dfrac{3p}{p + 1}$

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(3)　3種類の数字1，2，3を重複を許して並べて，6桁の整数をつくるとき，1，2，3のいずれもが1回以上使われているような整数は全部で $\boxed{\text{ウエオ}}$ 個ある。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{か}}$ ，$\boxed{\text{き}}$ ，$\boxed{\text{く}}$ に当てはまるもの（数・式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

正四面体の頂点をA，B，C，Dとする。点Pは次の規則(a)，(b)にしたがって，1秒ごとに頂点を移動する。

(a) 点Pは，時刻0では頂点Aに位置する。

(b) 点Pが，ある頂点X（ただしXはA，B，C，Dのいずれか）にいるとき，点Pは1秒後にはX以外の3つの頂点のいずれかに，等しい確率で移っている。

以下の問いに答えよ。

(1) 時刻0から4秒後に点Pが頂点Aにいる確率は $\boxed{\text{か}}$ である。

(2) 時刻0から n 秒後に点Pが頂点Aにいる確率を p_n，また n 秒後に点Pが頂点Bにいる確率を q_n とする。p_n および $p_n - q_n$ を n の式で表すと $p_n = \boxed{\text{き}}$ ，$p_n - q_n = \boxed{\text{く}}$ である。ただし，n は自然数とする。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅳ〕 (1)　2 以上の自然数 n に対して，

$$a_n = n(17n-20)(19n-20)$$

と定める。すべての $a_n\ (n \geqq 2)$ に共通な約数である素数 p を全部求めよ。

(2)　n と $17n-20$ と $19n-20$ がいずれも素数となるような 2 以上の自然数 n を全部求めよ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔V〕 座標空間において，点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ -2,\ 0)$，球面 $S:(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$ および xy 平面上の放物線 $C:4x-y^2=0$ を考える。また，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t^2}{4},\ t,\ 0\right)$ は放物線 C 上を動くとする。ただし t は実数である。以下の問いに答えよ。

(1) t が $-2 \leqq t \leqq 2$ を動くとき，線分 PQ の通過する部分を M とする。

図形 M，平面 $z=0$ および三角形 PAB で囲まれた立体を K とする。

(i) s は $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす定数とする。K を平面 $z=s$ で切ったときの切り口の面積を s の式で表せ。

(ii) K の体積を求めよ。

(2) 実数 t に対し，線分 PQ と球面 S は共有点をただ1つもつことを示し，その共有点の座標を t の式で表せ。

(3) (2)における線分 PQ と球面 S との共有点を R とする。点 Q が放物線 C 上を動くとき，点 R の軌跡は平面 $z-x=1$ 上のある円に含まれる。この円の中心の座標と半径を求めよ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）