

# 数 学 問 題

## 注意事項

1. この問題冊子は12 ページあります。解答用紙には、「数学①」と「数学②」の2枚あり、「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は、2枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認下さい。
3. 監督者の指示にしたがい、2枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入下さい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄にマーク下さい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄に記入下さい。
6. 問題〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕は、解答用紙「数学②」の所定の欄に解答下さい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入下さい。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず、必ず提出下さい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰り下さい。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔 I 〕 次の空欄 **ア** から **エ** にあてはまるものを解答群の中から選び、その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また、空欄 **オ** から **ケ** にあてはまる 0 から 9 までの数字を、解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、**カキクケ** は 4 桁の数である。

(1) 曲線  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  は、点  $(p, 0)$  で  $x$  軸と接し、点  $(q, 0)$  で  $x$  軸と交わるとする。ただし、 $p < q$  とする。このとき、 $a, b, c$  を  $p, q$  で表すと、

$$a = \text{ア}, b = \text{イ}, c = \text{ウ}$$

となる。また、 $x$  軸とこの曲線とで囲まれる図形の面積を  $p, q$  で表すと **エ** となる。

アの解答群

- |             |              |             |
|-------------|--------------|-------------|
| ① $p + q$   | ④ $p + 2q$   | ⑦ $2p + q$  |
| ③ $2p + 2q$ | ⑤ $-p - q$   | ⑧ $-p - 2q$ |
| ⑥ $-2p - q$ | ⑧ $-2p - 2q$ | ⑨ $p - q$   |
| ⑨ $p - 2q$  |              |             |

イの解答群

- |                 |                |                 |
|-----------------|----------------|-----------------|
| ① $p^2 + 2q^2$  | ④ $2p^2 + q^2$ | ⑦ $pq + q^2$    |
| ③ $p^2 + pq$    | ⑤ $2p^2 + pq$  | ⑧ $pq + 2q^2$   |
| ⑥ $2pq + q^2$   | ⑧ $p^2 + 2pq$  | ⑨ $-p^2 - 2q^2$ |
| ⑨ $-2p^2 - q^2$ |                |                 |

ウの解答群

④  $-p^3$

①  $p^3$

②  $-q^3$

③  $q^3$

④  $pq^2$

⑤  $-pq^2$

⑥  $-p^2q$

⑦  $p^2q$

⑧  $p^3 + q^3$

⑨  $p^3 - q^3$

エの解答群

①  $\frac{(q-p)^3}{2}$

①  $\frac{(q-p)^3}{3}$

②  $\frac{(q-p)^3}{6}$

③  $\frac{(q-p)^3}{12}$

④  $(q-p)^3$

⑤  $(q-p)^4$

⑥  $\frac{(q-p)^4}{2}$

⑦  $\frac{(q-p)^4}{3}$

⑧  $\frac{(q-p)^4}{6}$

⑨  $\frac{(q-p)^4}{12}$

(2)  $0 \leq x < 2\pi$ において  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ を満たす  $x$ は全部で

オ
---

 個ある。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(3) 初項 3, 公差 4 の等差数列の項の中で, 73 で割り切れるものを小さい順に

$b_1, b_2, \dots$  とするとき,  $b_5 =$ 

カキクケ
------

 である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄  から  に当てはまるもの(数または式)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

$n$  は 3 以上の自然数とする。条件「 $1 \leq a < b < c \leq n$  かつ  $a + c = 2b$ 」を満たす自然数  $a, b, c$  の組の個数について、次の問いに答えよ。

- (1)  $n = 6$  のとき、条件を満たす自然数  $a, b, c$  の組は全部で  個ある。
- (2)  $n$  が偶数のとき、条件を満たす自然数  $a, b, c$  の組は全部で  個ある。
- (3)  $n$  が奇数のとき、条件を満たす自然数  $a, b, c$  の組は全部で  個ある。
- (4)  $n = 4000$  とする。条件を満たす自然数  $a, b, c$  の組のうち、 $a, b, c$  のいずれかが 2016 であるものは全部で  個ある。

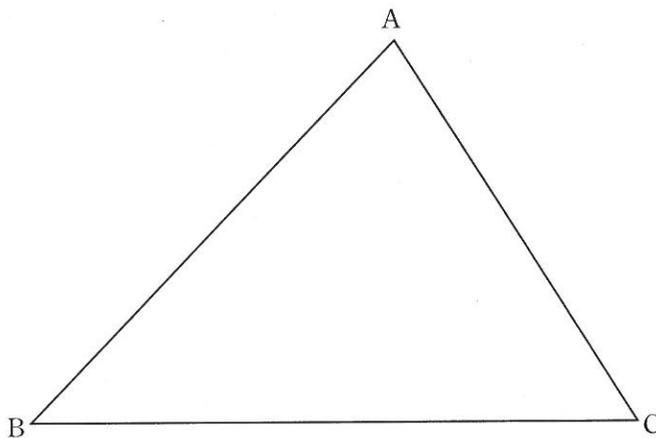
(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 鋭角三角形  $ABC$  で、 $CA < AB < BC$  を満たすものを考える。頂点  $A$  から辺  $BC$  に下ろした垂線を  $AP$ 、頂点  $B$  から辺  $CA$  に下ろした垂線を  $BQ$ 、頂点  $C$  から辺  $AB$  に下ろした垂線を  $CR$  とする。このとき、線分  $AP$ 、 $BQ$ 、 $CR$  は 1 点で交わることが知られている。

このようにして得られた  $AP$ 、 $BQ$ 、 $CR$  の交点を  $S$  とし、線分  $BS$ 、 $CS$ 、 $AS$  の中点をそれぞれ  $D$ 、 $E$ 、 $F$  とする。

また、辺  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  の中点をそれぞれ  $J$ 、 $K$ 、 $L$  とする。

- (1) 四角形  $JDEL$  は長方形であることを示せ。
- (2) 長方形  $JDEL$  が内接する円  $O$  の周上に  $Q$ 、 $R$  があることを示せ。
- (3)  $F$ 、 $K$ 、 $P$  が (2) の円  $O$  の周上にあることを示せ。



(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔IV〕 次の問いに答えよ。ただし  $\log$  は自然対数であり、 $e$  はその底である。

- (1)  $f(x) = x - 1 - \log x$  ( $x > 0$ ) とする。 $x \neq 1$  のとき  $f(x) > 0$  を示せ。
- (2) 2つの実数  $s, t$  ( $0 < s < t$ ) に対して、座標平面上の2つの曲線  $C_1: y = e^{sx}$  および  $C_2: y = e^{tx}$  を考える。ある直線  $\ell$  が2つの曲線  $C_1, C_2$  とそれぞれ点  $(\alpha, e^{s\alpha}), (\beta, e^{t\beta})$  で接するとする。
- (a)  $\alpha, \beta$  を  $s$  と  $t$  を用いて表せ。
- (b)  $\alpha > 0 > \beta$  を示せ。
- (c) 曲線  $C_1, C_2$  と直線  $\ell$  で囲まれた部分の面積を  $S$  とおく。 $s = 1$  のとき  $\lim_{t \rightarrow \infty} S$  を求めよ。ただし、必要があれば  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$  を用いて良い。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)