

数 学 問 題

注意事項

1. この問題冊子は 12 ページあります。解答用紙には、表と裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認下さい。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の所定の欄に氏名を記入下さい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマーク下さい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入下さい。
6. 問題〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕は、解答用紙の所定の欄に解答下さい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入下さい。
9. 訂正するときは、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出下さい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は 120 分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔I〕 次の空欄 **ア** , **イ** にあてはまるものを解答群の中から選び, その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また, 空欄 **ウ** から **ス** にあてはまる0から9までの数字を, 解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし, **サシス** は3桁の数, **ウエ** , **キク** , **ケコ** は2桁の数であり, その他は1桁の数である。なお, 分数は既約分数にすること。

- (1) 関数 $f(x) = x^2 \log x$ ($x > 0$) は $x =$ **ア** のとき最小値 **イ** をとる。ただし, 対数は自然対数で, e は自然対数の底とする。

アの解答群

- | | | | |
|------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| ① $\frac{1}{2e}$ | ② $\frac{1}{e}$ | ③ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ④ $\frac{2}{e}$ |
| ⑤ 1 | ⑥ $\frac{e}{2}$ | ⑦ \sqrt{e} | ⑧ e |
| ⑨ $2\sqrt{e}$ | ⑩ $2e$ | | |

イの解答群

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| ① 0 | ② $\frac{e}{2}$ | ③ $-\frac{1}{2e}$ |
| ④ $-\frac{1}{e^2}$ | ⑤ e^2 | ⑥ $2e(1 + 2 \log 2)$ |
| ⑦ $4e^2(1 + \log 2)$ | ⑧ $\frac{e^2}{4} \log \frac{e}{2}$ | ⑨ $-\frac{1 + \log 2}{4e^2}$ |
| ⑩ $\frac{-4 + 4 \log 2}{e^2}$ | | |

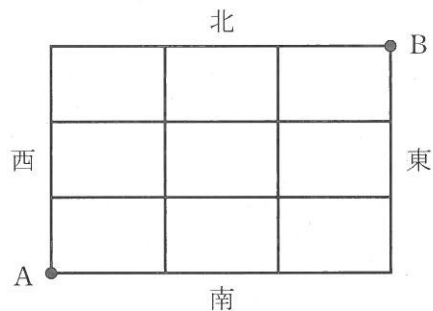
(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (2) 3^{52} の桁数は であり、最高位の数字は である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (3) 下図のように、ある街には東西に4本、南北にも4本の道がある。A地点を出発点としてB地点をゴールとする。

コインを投げ、表が出たら北に向かって1区画進み、裏が出たら東に向かって1区画進む。ただし、もし進む先がない場合は動かない。以上のルールでコイン投げを繰り返し行うものとする。またコインの表と裏が出る確率は等しく $\frac{1}{2}$ とする。



- (a) コイン投げを6回行った結果、ちょうどB地点に到達する確率は

$$\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

である。

- (b) コイン投げを9回行ってもB地点に到達できない確率は $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$ である。

る。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 次の各欄 から にあてはまる数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ とする。
 $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ であるので、

$$CE = \text{ }$$

である。したがって、 \overrightarrow{AC} を実数 p 、 q を用いて $\overrightarrow{AC} = p\vec{a} + q\vec{b}$ と表すとき

$$p = \text{ }, q = \text{ }$$

である。また、辺 BD と辺 CE の交点を P とし、 \overrightarrow{AP} を実数 r 、 s を用いて $\overrightarrow{AP} = r\vec{a} + s\vec{b}$ と表すとき

$$r = \text{ }, s = \text{ }$$

である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 自然数 a の正の約数の中で a 以外のものの和が a に等しいとき、 a を完全数という。以下の問いに答えよ。

(1) 次の にあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

28 の正の約数の中で 28 以外のものをすべて書きあげると であるから、28 は完全数である。

(2) 自然数 n と素数 p に対して、 $2^{n-1}p$ のすべての正の約数の和を n と p で表せ。ただし $p \neq 2$ とする。

(3) n は $2^n - 1$ が素数であるような自然数とする。このとき、 $2^{n-1}(2^n - 1)$ が完全数であることを示せ。

(4) a が偶数で完全数ならば、ある自然数 n に対して $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ と表されることを示せ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

[IV] 原点を O とする座標平面上に点 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$ をとる。さらに、点 P は x 軸上を A から O まで動き、点 Q は $PQ = 2$ を満たしながら、 y 軸上を O から B まで動くとする。線分 PQ が通過する領域を D とする。 $\angle QPC = \theta$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、直線 PQ の傾きと y 切片を θ を用いて表せ。
- (2) k を $0 < k < 2$ を満たす定数とする。 P が A から $(k, 0)$ まで動くときに線分 PQ と直線 $x = k$ の交点を R とする。 R の y 座標が最大となる θ を α とするとき、 k と α の間で成り立つ関係式を求めよ。またその最大値を k を用いずに α のみを用いて表せ。

- (3) 領域 D は、曲線

$$y = f(x) \quad (0 \leq x \leq 2)$$

および x 軸、 y 軸で囲まれる領域となる。 $f(x)$ を求めよ。

- (4) 領域 D の面積を求めよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)