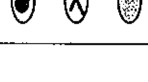
ゆ

数　学　問　題

注意事項

1. この問題冊子は14ページあります。解答用紙には，おもてと裏がありま す。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するときは，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし $\boxed{\text{エオ}}$ は2桁の数である。また e は自然対数の底である。

(1) $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ とする。$f'(x)$ と $f''(x)$ を $f(x)$ を用いて表すと，それぞれ

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\cdot\{f(x)\}^2-\boxed{\text{イ}}\cdot f(x),$$

$$f''(x)=\boxed{\text{ウ}}\cdot\{f(x)\}^3-\boxed{\text{エオ}}\cdot\{f(x)\}^2+\boxed{\text{カ}}\cdot f(x)$$

となる。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2) $-1 < x < 1$，$0 < y$ とする。3点 A(1, 0)，B(x, y)，C(-1, 0)を頂点とする鋭角三角形ABCにおいて，辺AB上の点をD，辺BC上の点をE，線分AEとCDとの交点をPとする。

(a) BE：EC＝1：1 かつ AD：DB＝2：1 のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ が成り立つ。

(b) BE：EC＝1：1 のとき，$\angle\mathrm{AEB} = 90^\circ$ となるような点Bの軌跡は中心 $\left(\boxed{サ}, \boxed{シ}\right)$，半径 $\boxed{ス}$ の円の一部である。

(c) (b)において，さらに $\angle\mathrm{CDA} = 90^\circ$ とする。点Pの y 座標が最大値をとるとき，Pの x 座標の値は $\boxed{セ} - \sqrt{\boxed{ソ}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{か}}$ に当てはまる数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし log は自然対数である。

(1) $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$ とする。単位円上の点 $P_n(\cos n\theta,\ \sin n\theta)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ は正 7 角形の頂点をなすので

$$\sum_{n=0}^{6} \cos n\theta = \boxed{\text{あ}}$$

である。さらに $\theta + 6\theta$, $2\theta + 5\theta$, $3\theta + 4\theta$ が 2π であるから

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \boxed{\text{い}}$$

であり，よって

$$\cos\theta + \cos 2^2\theta + \cos 3^2\theta = \boxed{\text{う}}$$

である。これらから

$$\sum_{n=1}^{300} \cos n^2\theta = \boxed{\text{え}}$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2)

(a) $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} = \boxed{\text{お}}$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\, d\theta = \log\left(\boxed{\text{か}}\right)$

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{さ}}$ から $\boxed{\text{す}}$ に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

AとBの二人が繰り返しゲームを行う。各ゲームにおいて，Aが勝つ確率を p，Bが勝つ確率を $1-p$ とする。ただし $0<p<1$ である。

k を自然数とする。先に k 勝した方を優勝とし，どちらかが優勝するまでゲームを続けて行う。

$k \leqq n \leqq 2k-1$ をみたす自然数 n に対し，n 回目のゲームでAの優勝が決まる確率を $P(n)$ とする。

(1) $P(n)$ を p，k，n を用いて表すと $\boxed{\text{さ}}$ である。

(2) $\dfrac{P(n+1)}{P(n)}$ を p，k，n を用いて表すと $\boxed{\text{し}}$ である。ただし $k \leqq n \leqq 2k-2$ とする。

(3) $k=20$，$p=0.6$ のとき $P(n)$ を最大にする n は $\boxed{\text{す}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 n を3以上の自然数とする。1から n までの自然数が一つずつ書かれた n 枚のカードがある。異なるカードには異なる数が書かれているとする。これらを円周上にすべて並べる。このときどのような順番で並べたとしても，以下のことが成り立つことを示せ：

(*) 隣接する3枚のカードの数の和の最大値は $\frac{3}{2}(n+1)$ 以上である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔V〕 半径1の円に内接する△ABCを考える。$\angle B = x$, $\angle C = t$ とし，△ABCの3辺の長さの和を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) ℓ を t, x を用いて表せ。

(2) 点A, Bを固定して点Cを動かすとき，ℓ の最大値 $L(t)$ を t で表せ。

(3) t が $0 < t < \pi$ の範囲を動くとき，(2)で求めた $L(t)$ の最大値を求めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）