





数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は10ページあります。解答用紙には、おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔I〕の解答は、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔II〕,〔III〕の解答は、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔IV〕,〔V〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するときは、消しゴムできれいに消し、消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで、必ず提出しなさい。
12. 試験時間は120分です。

※ この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	  

1. 1949年10月1日中华人民共和国成立，标志着中国历史进入新纪元。

2. 1954年9月，第一届全国人民代表大会第一次会议在北京召开，通过了《中华人民共和国宪法》。

3. 1956年，社会主义改造基本完成，中国进入社会主义初级阶段。

4. 1978年12月，十一届三中全会召开，确立了改革开放的方针，中国开始实行对内改革、对外开放的政策。

5. 1989年6月，十三届四中全会召开，江泽民同志当选为中共中央总书记。

6. 1992年10月，十四大召开，确立了社会主义市场经济体制的改革目标。

7. 1997年9月，十五大召开，确立了邓小平理论在全党的指导地位。

8. 2002年11月，十六大召开，确立了“三个代表”重要思想在全党的指导地位。

9. 2007年10月，十七大召开，确立了科学发展观在全党的指导地位。

10. 2012年11月，十八大召开，确立了习近平新时代中国特色社会主义思想在全党的指导地位。

11. 2017年10月，十九大召开，确立了习近平新时代中国特色社会主义思想在全党的指导地位。

12. 2022年10月，二十大召开，确立了习近平新时代中国特色社会主义思想在全党的指导地位。

13. 2023年7月，二十届三中全会召开，进一步全面深化改革，推进中国式现代化。

14. 2024年7月，二十届四中全会召开，进一步全面深化改革，推进中国式现代化。

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 354

LECTURE 1

〔 I 〕 次の空欄 から に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし \log は自然対数, e はその底である。

(1) $x + 3y \leq 5$, $4x + y \leq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ のとき

$x + y$ の最小値は , 最大値は である。

(2) $a = (\log 2)^2$, $b = (\log 5)^2$ とするとき, $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = \boxed{\text{ウ}}$ となる。

〔Ⅱ〕 次の空欄 から に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙

の所定の欄に記入せよ。ただし e は自然対数の底である。

(1) $2 \cos \frac{2\pi}{n}$ が整数となるような自然数 n をすべて列挙すると

$n =$ である。

(2) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ は $x =$ のとき最小値 をとり、
 $x =$ のとき最大値 をとる。曲線 $y = f(x)$ の変曲点
のうちで x 座標が正であるものの座標は である。

〔Ⅲ〕 次の空欄 から に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

A と B を数直線上の異なる 2 点とする。点 P はこの 2 点 A, B のいずれかの上にあり, 1 回の操作で次のように動く。

- 点 P が A 上にあるときは, $\frac{1}{3}$ の確率で B に移り, $\frac{2}{3}$ の確率で A にとどまる。
- 点 P が B 上にあるときは, $\frac{1}{4}$ の確率で A に移り, $\frac{3}{4}$ の確率で B にとどまる。

操作を 1 度もしていない時点では点 P は A 上にあるとする。操作を n 回おこなった後に点 P が A 上にある確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p_1 =$, $p_2 =$ である。
 - (2) p_{n-1} を用いて p_n を表すと $p_n =$ となる。
 - (3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n =$ となる。
- したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n =$ である。

(このページは計算用紙として使用してよい)

[IV] すべての自然数 n に対し、次の等式

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2} \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、 n についての数学的帰納法を用いて示せ。

(このページは計算用紙として使用してよい)

[V] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす θ に対して、座標空間の 4 点

$$P(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta), \quad Q(-\cos \theta, \sin \theta, -\sin \theta),$$

$$R(-\cos \theta, -\sin \theta, -\sin \theta), \quad S(\cos \theta, -\sin \theta, \sin \theta)$$

で定まる長方形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を T とする。 T の体積 V を以下の問いにしたがって求めよ (途中の計算や考え方も記述すること)。

- (1) t を $-\cos \theta \leq t \leq \cos \theta$ をみたす実数とする。 yz 平面に平行な平面 $x = t$ と線分 PQ との交点を A 、また平面 $x = t$ と線分 RS との交点を B とする。 A と B の座標をそれぞれ t と θ を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた点 A 、 B を両端にもつ線分 AB を x 軸のまわりに 1 回転させたとき、線分 AB が通過する部分の面積を求め、それが t によらないことを示せ。
- (3) T の体積 V を求めよ。
- (4) θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、 V の最大値とそのときの $\cos \theta$ の値を求めよ。

(このページは計算用紙として使用してよい)

