し

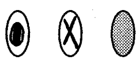
数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は10ページあります。解答用紙には，おもてと裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル（いずれもHB・黒）で記入しなさい。
9. 訂正するときは，消しゴムできれいに消し，消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らないで，必ず提出しなさい。
12. 試験時間は120分です。

※　この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

（マーク記入例）

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし log は自然対数，e はその底である。

(1) $x+3y \leqq 5$，$4x+y \leqq 9$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき

$x+y$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ ，最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

◇M54(612—1109)

(2)　$a = (\log 2)^2$, $b = (\log 5)^2$ とするとき，$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = \boxed{\quad ウ \quad}$ となる。

〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{エ}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし e は自然対数の底である。

(1) $2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ が整数となるような自然数 n をすべて列挙すると

$n =$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ は $x =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとり，$x =$ $\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。曲線 $y = f(x)$ の変曲点のうちで x 座標が正であるものの座標は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{コ}}$ から $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるもの(数・式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

AとBを数直線上の異なる2点とする。点Pはこの2点A，Bのいずれかの上にあり，1回の操作で次のように動く。

- 点PがA上にあるときは，$\dfrac{1}{3}$ の確率でBに移り，$\dfrac{2}{3}$ の確率でAにとどまる。
- 点PがB上にあるときは，$\dfrac{1}{4}$ の確率でAに移り，$\dfrac{3}{4}$ の確率でBにとどまる。

操作を1度もしていない時点では点PはA上にあるとする。操作を n 回おこなった後に点PがA上にある確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $p_1 = \boxed{\text{コ}}$，$p_2 = \boxed{\text{サ}}$ である。

(2) p_{n-1} を用いて p_n を表すと $p_n = \boxed{\text{シ}}$ となる。

(3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n = \boxed{\text{ス}}$ となる。

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \boxed{\text{セ}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 すべての自然数 n に対し，次の等式

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法を用いて示せ。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔V〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす θ に対して，座標空間の4点

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \sin\theta),\qquad \mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta,\ -\sin\theta),$$
$$\mathrm{R}(-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ -\sin\theta),\ \mathrm{S}(\cos\theta,\ -\sin\theta,\ \sin\theta)$$

で定まる長方形を x 軸のまわりに1回転させてできる立体を T とする。T の体積 V を以下の問いにしたがって求めよ(途中の計算や考え方も記述すること)。

(1) t を $-\cos\theta \leqq t \leqq \cos\theta$ をみたす実数とする。yz 平面に平行な平面 $x = t$ と線分PQとの交点をA，また平面 $x = t$ と線分RSとの交点をBとする。AとBの座標をそれぞれ t と θ を用いて表せ。

(2) (1)で求めた点A，Bを両端にもつ線分ABを x 軸のまわりに1回転させたとき，線分ABが通過する部分の面積を求め，それが t によらないことを示せ。

(3) T の体積 V を求めよ。

(4) θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき，V の最大値とそのときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）