2020年度　明治大学

【総合数理学部】

解答時間　120分

配点　　　200点

ま

数　学　問　題

注意事項

1. この問題冊子は14ページあります。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は，２枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
7. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕　次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，$\boxed{\text{オカ}}$ は 2 桁の数である。

(1)　三角形 ABC の内心を I, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。$AB = 2, BC = 3, CA = 4$ とするとき

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

である。

なお，分数は既約分数にすること。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2)　さいころを1回投げる試行において起こりうる事象を考える。事象 X の確率を $P(X)$ で表す。2つの事象 A, B が $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たすとき，事象 A, B は独立であるという。たとえば奇数の目が出る事象を A, 4以下の目が出る事象を B とするとき

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

であるので，事象 A, B は独立である。

3以下の目が出る事象を C とするとき，事象 C, D が独立となるような事象 D (空事象を除く) の個数は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅱ〕 空欄 $\boxed{\quad あ \quad}$ から $\boxed{\quad う \quad}$ にあてはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) x についての方程式

$$kx^3 - x^2 + 4k = 0$$

の実数解の個数が 1 であるような実数 k の値の範囲は $\boxed{\quad あ \quad}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2)　$\alpha = \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right) i$ とする。ただし，i は虚数単位である。複素数平面上の 3 点 0, α, β が正三角形の頂点となるような β は 2 つ存在する。それらは $\boxed{\text{い}}$ と $\boxed{\text{う}}$ である。ただし，$\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$ の解答の順序は問わない。解答は三角関数を用いずに表せ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔III〕　次の空欄 $\boxed{\text{か}}$ から $\boxed{\text{く}}$ に当てはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし，解答は三角関数を用いずに表せ。

(1)　$\cos\dfrac{\pi}{8} = \boxed{\text{か}}$ である。

(2)　$\sin\dfrac{\pi}{16} = \boxed{\text{き}}$ である。

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める。例えば

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

となる。

このとき

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \sqrt{2 - a_n} = \boxed{\text{く}}$$

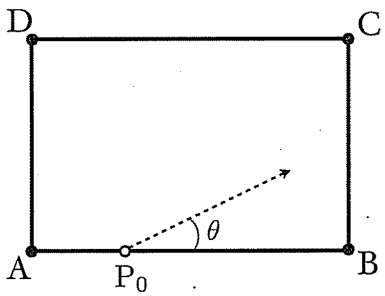
である。

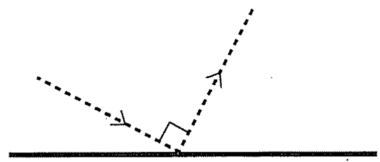
（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔IV〕 長方形 ABCD の辺 AB 上にある点 P_0 から出発した動点 Q は，この長方形の内部をまっすぐ進み，いずれかの辺上の点 P_1 に到達する。その後，$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ の順に以下を繰り返す。

> 点 P_k が長方形 ABCD の頂点であれば動点 Q はそこで停止し，点 P_k が長方形 ABCD の頂点でなければ動点 Q は進行方向を 90° 変えて，また長方形 ABCD の内部をまっすぐ進み，いずれかの辺上の点 P_{k+1} に到達する。

$AB = a$, $BC = b$, $\angle BP_0P_1 = \theta$, $AP_0 = \ell$ として，θ と ℓ は $0 < \theta < 90°$, $0 < \ell < a$ を満たすとする。このとき以下の問いに答えよ。ただし，辺は両端の点を含み，長方形の内部は辺を含むとする。





動点 Q が辺 (頂点を除く) に到達すると進行方向を 90° 変える

(1) 点 P_1 が辺 BC 上にあるための必要十分条件を a, b, θ, ℓ で表せ。途中経過を記述する必要はない。

(2) 動点 Q が点 P_0 を出発した後，辺 BC 上の点 P_1 に到達し，次に辺 CD 上の点 P_2 に到達し，次に辺 DA 上の点 P_3 に到達し，次に辺 AB 上の点 P_0 に戻るならば

$$\{b - (a - \ell)\tan\theta\}\tan\theta = \ell \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示せ。

(3) $a < b$ ならば，すべての ℓ に対して，条件 ① と (1) の条件を満たすような θ が存在することを示せ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔V〕(1)　実数 r と自然数 n について和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ を求めよ。途中経過を記述する必要はない。

(2)　自然数 k に対して $\displaystyle\int_0^1 (-x)^{k-1}\,dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(4)　自然数 n に対して $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）