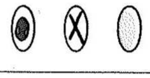
を

数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は12ページあります。試験開始の指示のあとで確認しなさい。ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含みません。
2. 解答用紙には表と裏に解答欄があります。また，受験番号が解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と受験票に記されているあなたの受験番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示に従って，解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に，下のマーク記入例の良い例のようにマークしなさい。解答欄1行につき2つ以上マークしてはいけません。2つ以上マークした場合は，その解答は無効になります。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
7. マークを訂正するときは，消しゴムできれいに消しなさい。なお，消しクズが解答用紙に残らないようにしなさい。
8. 解答用紙は汚したり折り曲げたりしてはいけません。また所定の欄以外には何も記入してはいけません。
9. 解答用紙は必ず提出しなさい。問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
10. 試験時間は90分です。

(マーク記入例)

良い例	悪　い　例
	

〔 I 〕　次の ア から ハ にあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。 $\boxed{\text{アイ}}$ ， $\boxed{\text{ツテ}}$ ， $\boxed{\text{ノハ}}$ は 2 桁の数である。なお，分数は既約分数にすること。

(1)　a，b，c を実数の定数とし，$f(x) = x^2 - 4ax + a$，$g(x) = x^2 - bx + c$ とする。2 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの解をもつとし，それらを α，β とおく。また，2 次方程式 $g(x) = 0$ は異なる 2 つの解 $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ をもつとする。このとき，

$$b = \boxed{\text{アイ}}\, a - \boxed{\text{ウ}}$$

$$c = \boxed{\text{エ}}$$

である。さらに $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ がともに純虚数のとき，$a = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となり，$f(x) = 0$ の解は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pm \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\, i$$

となる。ただし，i は虚数単位を表す。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(2)　$f(x) = x\log x$ とする。このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h} = \boxed{\text{サ}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{f(e+2h)-f(e)} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

が成り立つ。ただし，$\log x$ は x の自然対数とし，e は自然対数の底とする。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(3)　座標空間の原点を O(0, 0, 0) とし，2 点 A(1, 1, 0)，B(1, −1, 0) をとる。点 P(x, y, z) は，2 つの条件 AP $= 3$，BP $= \sqrt{13}$ を満たす点とする。このとき y は一定の値をとり，$y = \boxed{\text{セ}}$ である。また，x のとり得る値の範囲は

$$-\boxed{\text{ソ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{タ}}$$

である。△OBP の面積が最大となるのは $x = \boxed{\text{チ}}$ のときで，このとき面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$ となる。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(4)　硬貨が6枚あり，そのうちの4枚が表，残りの2枚が裏の状態で置かれている。この6枚の硬貨の中から n 枚を無作為に選び，その n 枚を同時に投げる。その結果，6枚の硬貨のうち表と裏が3枚ずつとなる確率を p_n とする。このとき $p_1 = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$，$p_2 = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$，$p_6 = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ である。ただし，硬貨を投げるとき，表と裏はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るものとする。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

〔Ⅱ〕 次の $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{お}}$ にあてはまる数や式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。途中経過を記入する必要はない。

曲線 $y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C_1 とし，曲線 $y=\sqrt{\sin x}\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を K とする。$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として，点 $(t,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で立体 K を切ったときの断面積を $S(t)$ とすると $S(t)=\boxed{\text{あ}}$ であり，$t=\boxed{\text{い}}$ のとき $S(t)$ は最大値をとる。立体 K の体積 V を求めると $V=\boxed{\text{う}}$ である。

$0<a<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 a をとる。$0 \leqq u-a<u+a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす u に対して，点 $(u-a,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面を T_1，点 $(u+a,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面を T_2 とする。立体 K のうち，2 つの平面 T_1，T_2 ではさまれる部分の体積を $V_a(u)$ とおく。u が $a \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{2}-a$ の範囲を動くとき，$V_a(u)$ が最大となる u の値を u_a とする。$\sin u_a$ を a の式で表すと $\sin u_a=\dfrac{1}{\boxed{\text{え}}}$ である。また，$a \longrightarrow +0$ のとき $u_a \longrightarrow \boxed{\text{お}}$ である。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

〔Ⅲ〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく，途中経過も記述せよ。

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ として，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を考える。この曲線上の点 $(t,\ f(t))$ における法線を l_t とする。点 $(a,\ b)$ に対して，直線 l_t が $(a,\ b)$ を通るような実数 t の個数を $N(a,\ b)$ とする。すなわち，$N(a,\ b)$ は点 $(a,\ b)$ を通る法線の数である。

(1) l_t が点 $(a,\ b)$ を通るとき，a を b と t を用いて表せ。

(2) l_t が点 $(0,\ 3)$ を通るような t の値をすべて求めよ。また，$N(0,\ 3)$ を求めよ。

(3) 実数 b を固定するとき，$N(a,\ b)\leqq 2$ を満たす a のとり得る値の範囲を求めよ。必要なら b の値によって場合分けせよ。

(4) 3つの条件

$$N(x,\ y)\leqq 2,\ |x|\leqq\frac{1}{3},\ |y|\leqq\frac{1}{2}$$

を同時に満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を U とする。このとき，U の面積を求めよ。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）