さ

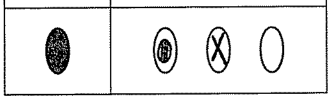
数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は 12 ページあります。試験開始の指示のあとで確認しなさい。ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含みません。
2. 解答用紙には表と裏に解答欄があります。また，受験番号が解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と受験票に記されているあなたの受験番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示に従って，解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ｉ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に，下のマーク記入例の良い例のようにマークしなさい。解答欄 1 行につき 2 つ以上マークしてはいけません。2 つ以上マークした場合は，その解答は無効になります。
5. 問題〔II〕,〔III〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
7. マークを訂正するときは，消しゴムできれいに消しなさい。なお，消しクズが解答用紙に残らないようにしなさい。
8. 解答用紙は汚したり折り曲げたりしてはいけません。また所定の欄以外には何も記入してはいけません。
9. 解答用紙は必ず提出しなさい。問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
10. 試験時間は 90 分です。

（マーク記入例）

良い例	悪　い　例



〔Ⅰ〕 次の ア から ヌ にあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。$\boxed{\text{ソタチ}}$，$\boxed{\text{ツテト}}$，$\boxed{\text{ナニヌ}}$ は3桁の数である。また，$\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ にはそれぞれ同じものがあてはまる。なお，分数は既約分数にすること。

(1) 多項式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 13，$x+1$ で割ると余りは -1 である。このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ると余りは

$$\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}$$

である。上の条件に加えて，$f(x)$ を微分して得られる多項式 $f'(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 11 であるとする。このとき，$f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ると余りは

$$\boxed{\text{ウ}}\,x^2+\boxed{\text{エ}}\,x+\boxed{\text{オ}}$$

である。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(2) △ABC において，AB=AC=6，BC=4 とする。このとき，△ABC の内接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，△ABC の内心を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

が成り立つ。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(3)　関数 $f(x)$ が等式

$$f(x) = \pi x \sin x + \frac{2\pi}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\ dt}$$

を満たすとき,

$$f(x) = \pi x \sin x - \boxed{\quad ス \quad} + \sqrt{\boxed{\quad セ \quad}}$$

または

$$f(x) = \pi x \sin x - \boxed{\quad ス \quad} - \sqrt{\boxed{\quad セ \quad}}$$

である。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

(4)　大きさが互いに異なる３つのさいころを同時に投げる。このとき，３つのさいころの出た目の積が，２の倍数となる場合は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 通り，３の倍数となる場合は $\boxed{\text{ツテト}}$ 通り，６の倍数となる場合は $\boxed{\text{ナニヌ}}$ 通りある。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

〔 II 〕 次の $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{か}}$ にあてはまる数や式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。途中経過を記入する必要はない。

a，b は実数で $a > 0$ とする。座標平面において，円 $x^2 + y^2 = 1$ を C とし，放物線 $y = ax^2 + b$ を D とする。

(1) 放物線 D の頂点の y 座標が正であり，円 C と放物線 D の共有点がただ1つであるとき，b の値は $\boxed{\text{あ}}$ である。

(2) 放物線 D の頂点の y 座標が負であり，円 C と放物線 D の共有点がただ1つであるとき，b の値は $\boxed{\text{い}}$ であり，a のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{う}}$ である。

(3) 放物線 D の頂点が円 C の内部にあり，円 C と放物線 D がちょうど2つの共有点をもつとき，b のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{え}}$ である。

(4) 放物線 D の頂点が円 C の外部にあり，円 C と放物線 D がちょうど2つの共有点をもつとき，b を a の式で表すと $b = \boxed{\text{お}}$ となり，a のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{か}}$ である。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）

〔 III 〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく，途中経過も記述せよ。

n を自然数，a を正の実数とする。座標平面上の曲線 $y = ax^n$ と曲線 $y = \log x$ は点 P で接しているとする。すなわち，これらの曲線は点 P を共有し，点 P で共通の接線をもつ。点 P の x 座標を p とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。また，自然対数の底を e で表す。

(1) a と p をそれぞれ n の式で表せ。

(2) 曲線 $y = ax^n$ と直線 $x = p$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S_n を (a と p を含まない) n の式で表せ。

(3) 曲線 $y = \log x$ と直線 $x = p$ および x 軸で囲まれる部分の面積 T_n を (a と p を含まない) n の式で表せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。必要なら，$t > 0$ に対して

$$1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} < e^{-t} < 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

が成立することを証明せずに用いてよい。

（このページは計算や下書きに利用してよい。）