ゆ

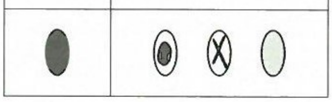
数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は10ページあります。試験開始の指示のあとで確認しなさい。
2. 解答用紙には表と裏に解答欄があります。また，受験番号が解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と受験票に記されているあなたの受験番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に，下のマーク記入例の良い例のようにマークしなさい。解答欄1行につき2つ以上マークしてはいけません。2つ以上マークした場合は，その解答は無効になります。
5. 問題〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
7. マークを訂正するときは，消しゴムできれいに消してください。なお，消しクズが解答用紙に残らないようにしてください。
8. 解答用紙は汚したり折り曲げたりしないでください。また所定の欄以外には何も記入してはいけません。
9. 解答用紙は必ず提出しなさい。問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
10. 試験時間は90分です。

（マーク記入例）

良い例	悪　い　例



〔I〕 次の **ア** から **ケ** にあてはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。$\boxed{\text{アイ}}$ は2桁の数，$\boxed{\text{ウエオ}}$ は3桁の数，$\boxed{\text{カキクケ}}$ は4桁の数である。

互いに異なるn個の玉を，互いに異なる4つの箱に，球が残らないようにすべて入れる。ただし，どの箱にも少なくとも1個は入れることにする。このような入れ方は，$n=4$のとき $\boxed{\text{アイ}}$ 通り，$n=5$のとき $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通り，$n=6$のとき $\boxed{\text{カキクケ}}$ 通りである。

〔 II 〕 次の コ から ツ にあてはまる 0 から 9 までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。$\boxed{\text{サシ}}$ と $\boxed{\text{スセ}}$ は 2 桁の数，$\boxed{\text{ソタチツ}}$ は 4 桁の数である。

正の整数 n に対して，2^k が $n!$ の約数となるような 0 以上の整数 k のうち，最大のものを $f(n)$ とする。

(1) $f(7) = \boxed{\text{コ}}$ である。

(2) $f(n) = 10$ となる正の整数 n のうち，最小のものは $\boxed{\text{サシ}}$ である。

(3) $f(n+1) = f(n) + 5$ となる正の整数 n のうち，最小のものは $\boxed{\text{スセ}}$ である。

(4) $f(2^{10}) = \boxed{\text{ソタチツ}}$ である。

〔 III 〕 次の $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{お}}$ にあてはまるもの（数，式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。途中経過を記入する必要はない。

点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とし，放物線 $y = x^2$ を D とする。

円 C と放物線 D の共有点の x 座標は $\boxed{\text{あ}}$ である。

$\alpha > \beta > 0$ として，D 上の 2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ直線を l とする。直線 l の方程式を y について解いた形に表すと，$y = \boxed{\text{い}}$ となる。また，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ と直線 l との距離は $\boxed{\text{う}}$ である。直線 l が円 C に接するとき，$\dfrac{1}{\beta}$ を α を用いて表すと，$\dfrac{1}{\beta} = \boxed{\text{え}}$ となる。

さて，放物線 D 上の点 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ を，次の条件を満たすように定める。

- P_1 の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。
- 直線 P_nP_{n+1} は円 C に接する。
- P_n の x 座標を x_n とするとき，$x_n > x_{n+1} > 0$ である。

このとき，P_n の x 座標 x_n を n を用いて表すと，$x_n = \boxed{\text{お}}$ となる。

〔 IV 〕 次の $\boxed{\text{か}}$ から $\boxed{\text{け}}$ にあてはまるものを解答用紙の所定の欄に記入せよ。$\boxed{\text{か}}$ には t の式，$\boxed{\text{き}}$ には u の式，$\boxed{\text{く}}$ と $\boxed{\text{け}}$ には数があてはまる。途中経過を記入する必要はない。また，$\boxed{\text{か}}$ と $\boxed{\text{か}}$ には同じものがあてはまる。

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ とする。時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = t, \quad y = -\log(\cos t)$$

で表されるような点 P を考える。このとき，点 P の時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を t で表すと，$|\vec{v}| = \boxed{\text{か}}$ である。ゆえに，$t = 0$ から $t = \dfrac{\pi}{6}$ までの間に点 P が動く道のり L は，$L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \boxed{\text{か}}\, dt$ である。$u = \sin t$ とおくと $L = \displaystyle\int_0^a \boxed{\text{き}}\, du$ となる。この定積分の上端 a は $a = \boxed{\text{く}}$ である。この定積分を計算して $L = \boxed{\text{け}}$ を得る。ただし，$\log x$ は x の自然対数とする。

〔 V 〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく，途中経過も記述せよ。

a, b を実数の定数として，方程式 $y = e^{x-a} + b$ の表す曲線を C とする。また，方程式 $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の表す曲線を D とする。曲線 C と曲線 D は，x 座標が t である点で接している。ここで，2 曲線が点 P で接するとは，それらが点 P を共有し，点 P で共通の直線に接することである。また，e は自然対数の底である。

(1) $t > 0$ として，a と b をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) t が $t > 0$ の範囲を動くとき，直線 $x = 0$ と曲線 C との交点の y 座標のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) k を正の定数とする。t が $t > 0$ の範囲を動くとき，直線 $x = k$ と曲線 C との交点の y 座標のとり得る値の範囲を求めよ。