あ

数　学　問　題

注　意

1. この問題冊子は14ページあります。解答用紙には，表と裏があります。
2. あなたの受験番号は解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕は，解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正するときは，消しゴムできれいに消し，消しクズを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は必ず提出しなさい。
12. 試験時間は90分です。

※　この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。

(マーク記入例)

良い例	悪　い　例

〔Ⅰ〕 以下のアからヌにあてはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツテ}}$，$\boxed{\text{トナ}}$，$\boxed{\text{ニヌ}}$は2桁の数であり，その他は1桁の数である。なお，分数は既約分数にすること。

(1) 正の整数nを3で割ったときの余りをa_nとすると，$a_{100} = \boxed{\text{ア}}$，$a_{2013} = \boxed{\text{イ}}$である。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$ は，$t = \sin x$ と置換することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)(\sin x)'\, dx$$
$$= \int_0^{1} (1 - t^2)\, dt$$
$$= \frac{2}{3}$$

と求めることができる。同様に，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$ を求めると $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(3) ある法案に対して，あらかじめ2人の人A，Bが，Aは賛成，Bは反対であると決めている。このとき，3人目の人Cは，AかBを無作為に選び，その人と同じ意見をもつことにする。さらに4人目の人Dは，A，B，Cの中から無作為に1人選び，その人と同じ意見をもつことにする。このとき，

A，B，Cのうち1人が賛成し2人が反対する確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

また，A，B，C，Dのうち1人が賛成し3人が反対する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，

2人が賛成し2人が反対する確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(4)　0または正の整数x，yを用いて$n = 5x + 11y$と表される整数n全体の集合をAとする。

Aに属する整数のうち，小さい方から数えて3番目のものは $\boxed{\text{タチ}}$，4番目のものは $\boxed{\text{ツテ}}$ である。また，9番目のものは $\boxed{\text{トナ}}$ である。

mは整数であって，$n \geqq m$を満たす整数nはすべてAの要素であるという。このような整数mのうち最小のものは $\boxed{\text{ニヌ}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅱ〕 以下の あ から う にあてはまるもの(数，式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

a を実数の定数とし，x に関する方程式

$$x^3 - 5x^2 + a = 0 \qquad \cdots\cdots \ (*)$$

を考える。

(1) 方程式(＊)が異なる3つの実数解をもつために a が満たすべき条件は，$\boxed{\text{あ}}$ である。

(2) 方程式(＊)が異なる3つの実数解をもち，その中に整数が含まれるという。そのような a の値は，全部で $\boxed{\text{い}}$ 個ある。

(3) a が(2)で考えた値のうちで2番目に小さい値をとるとき，方程式(＊)の解をすべて求めると，$x = \boxed{\text{う}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔III〕 以下の え から け にあてはまるもの(数，式など)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし，く については

増加する，減少する，極値をもつ

のいずれかを記入せよ。

xy 平面上で，方程式 $y=\dfrac{1}{x}$ で表される曲線の第1象限内の部分を C とし，C 上の任意の点Aにおける C の接線を l_A と表すことにする。

$0<p<q$ とし，C 上に2点 $P\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$Q\left(q,\ \dfrac{1}{q}\right)$ をとる。このとき，l_P の方程式は $\boxed{\text{え}}$ であり，l_P と l_Q の交点Rの座標を p，q を用いて表すと，$\boxed{\text{お}}$ である。

また，線分PQと曲線 C によって囲まれた図形の面積を S とし，$t=\dfrac{q}{p}$ とおくと，S は t の関数として $S=\boxed{\text{か}}$ となる。よって，$\dfrac{dS}{dt}=\boxed{\text{き}}$ となるので，S は区間 $t>1$ において $\boxed{\text{く}}$ 関数である。

さて，$p=1$，$q=2$ のときの S の値を S_0 とする。2点P，Qが条件 $S=S_0$ を満たしながら動くとき，点Rは方程式 $\boxed{\text{け}}$ で表される曲線の第1象限内の部分を描く。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔IV〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく，途中経過も書くこと。

Oを原点とするxy平面上で，放物線$y = x^2 - 2x$の上に異なる2点$A(a,\ a^2 - 2a)$，$B(b,\ b^2 - 2b)$をとり，$s = a + b$，$t = ab$とおく。

(1) 内積$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$を$s$，$t$を用いて表せ。

(2) A，BがOに一致せず，かつ$\angle AOB = 90^\circ$となるように動くとき，点$(s,\ t)$が描く図形をst平面に図示せよ。

(3) A，Bが(2)のように動くとき，直線ABはある定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）