ま

数　学　問　題

はじめに，これを読むこと。

1. この問題用紙は３ページまである。ただし，ページ番号のない**白紙**はページ数に含まない。
2. 問題は，１ページから３ページに書かれている。それ以外のページは，計算用紙として使用してよい。
3. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答は，すべて解答用紙の所定欄にマークするか，または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
6. 分数形で解答する場合は，それ以上約分できない形で答えなさい。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
7. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
8. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収する**。持ち帰らず，必ず提出しなさい。ただし，この問題用紙は，必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分である。
13. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

※　この問題用紙は，必ず持ち帰りなさい。

〔Ⅰ〕 次の各問の $\boxed{}$ に入る数値を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1． $t \geqq 0$ について，平面上に点 $\mathrm{P}(2t-1,\ t+2)$ と点 $\mathrm{Q}(t^2+2t,\ t^2+t-1)$ をとる。このとき，線分 PQ の長さが最小となるのは，$t=$ $\boxed{(1)}$ のときで，その長さは，$\boxed{(2)}$ である。

2． $x \geqq 0$ について，$\vec{a}=(x-1,\ 2x+3)$，$\vec{b}=(-2x-1,\ x+3)$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta = 1$ ならば，$x=$ $\boxed{(3)}$ であり，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ ならば，$x=$ $\boxed{(4)}$ である。

3． 全体集合 U の部分集合 A，B，C について，$A \cap B \cap C \neq \emptyset$ とする。ここで，$D = A \cap B$，$E = B \cap C$，$F = A \cap C$ と置き，

$$D \cup F = F,\ E \cup D = D,\ F \cup E = E$$

を満たすとする。このとき，$\dfrac{n(A \cap B)}{n(A \cap B \cap C)} = \boxed{(5)}$ である。

さらに，$n(A)=11$，$n(B)=12$，$n(C)=13$，$n(A \cup B \cup C)=22$ とすると，$n(A \cap B \cap C)=$ $\boxed{(6)}$ である。

A． 0	B． 1	C． 2	D． 3
E． 4	F． 5	G． 6	H． 7
I． 8	J． 9	K． 10	L． 11
M． 12	N． 13	O． 14	P． 15
Q． $\dfrac{1}{2}$	R． $\dfrac{1}{3}$	S． $\dfrac{2}{3}$	T． $\dfrac{1}{4}$
U． $\sqrt{2}$	V． $2\sqrt{2}$	W． $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	X． $1+\sqrt{3}$
Y． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	Z． $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$		

〔Ⅱ〕 次のア～タに当てはまる0～9の数字を解答欄にマークせよ。

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ について，$f(\alpha) = \cos^2\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha + 1$ とする。

倍角の公式より，

$$f(\alpha) = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} + \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\cos(2\alpha) + \sqrt{\boxed{オ}}\sin(2\alpha)$$

と表すことが出来る。このとき，

$$r\cos\theta = \boxed{ウ}, \quad r\sin\theta = \boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$$

を満たすように $0 \leqq r$ と $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ をとると

$$r = \boxed{カ}, \quad \cos\theta = \frac{\boxed{ウ}}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{r}$$

である。この r，θ を用いて更に $f(\alpha)$ を変形すれば，

$$f(\alpha) = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} + \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\cos(2\alpha - \theta)$$

となる。従って，$f(\alpha)$ の最大値は，$\boxed{サ}$ で，$f(\alpha)$ の最小値は，$\boxed{シ}$ となる。

更に $f(\alpha)$ が最大値となる α について，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}}, \quad \sin\alpha = \frac{\boxed{ソ}}{\sqrt{\boxed{タ}}}$$

である。

〔Ⅲ〕 n を自然数とし，$r \geqq 0$ を整数とするとき，$S_r(n) = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r$ とする。このとき，次の問に答えよ。

1．(1) $n^2 - \displaystyle\int_{n-1}^{n} x^2\,dx = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 n)$ となる a_0，a_1 を求めよ。

(2) $n^3 - \displaystyle\int_{n-1}^{n} x^3\,dx = \frac{1}{4}(b_0 + b_1 n + b_2 n^2)$ となる b_0，b_1，b_2 を求めよ。

2．$r > 0$ のとき，

$$n^r - \int_{n-1}^{n} x^r\,dx = \frac{1}{r+1}(a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_{r-1} n^{r-1})$$

となる $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ を組合せの総数の記号を用いて表せ。

3．$r > 0$ のとき，上の問 2 の $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ に対して，

$$S_r(n) = \frac{1}{r+1}\left(a_0 S_0(n) + a_1 S_1(n) + a_2 S_2(n) + \cdots + a_{r-1} S_{r-1}(n) + n^{r+1}\right)$$

となることを示せ。