明治大学
情報コミュニケーション学部

に

数　学　問　題

はじめに，これを読みなさい。

1. この問題用紙は9ページある。**ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含まない**。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は，すべて解答用紙の所定欄にマークするか，または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅴ〕まで5問ある。〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕は必ず解答すること。〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕はいずれか2問を選択して解答すること。
10. **解答用紙はすべて回収する**。持ち帰らず，必ず提出すること。ただし，この問題用紙は，必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は60分である。
12. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕 (1)〜(5)において，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒの値の大小関係を調べ，最大のものと最小のものを，それぞれ所定の解答欄(表面)にマークせよ。

(1) Ⓐ $\log_2 3$ Ⓑ $\log_3 2$ Ⓒ $\dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_2 \sqrt{2}}$

(2) $a > 0$，$b > 0$，$c > 0$であり，

$c^2 - ab - bc + ac > 0$かつ$ab + bc - a^2 - ac > 0$であるとき，

Ⓐ a Ⓑ b Ⓒ c

(3) ある等比数列の第4項から初項を引いた値は14，第5項から第2項を引いた値は7である。この等比数列について，

Ⓐ 初項 Ⓑ 公比 Ⓒ 第3項

(4) 空間上にP$(0,\ 1,\ 0)$とQ$(1,\ 2,\ 3)$があり，直線PQと平面$y = -1$の交点をRとする。

Ⓐ Rのx座標 Ⓑ Rのy座標 Ⓒ Rのz座標

(5) 2つの0でない実数m，nに関する次の4つの条件

- mは負，または，nは負である
- mは正，または，nは正である
- m，nはともに負である
- m，nはともに正である

のうち

Ⓐ 「$m + n < 0$」であるための必要条件にあたる条件の個数

Ⓑ 「$\dfrac{m}{n} < 0$」であるための十分条件にあたる条件の個数

Ⓒ 「$mn > 0$」であるための十分条件にあたる条件の個数

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に，解答をマークせよ。

なお，問題文中の $\boxed{\text{アイ}}$ ， $\boxed{\text{ウエ}}$ は答が2ケタであることを表しており，**ア**～**エ**の部分には数字(0～9)が入る。 $\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ は答が符号付き1ケタであることを表しており，答の数字をマークするとともに，答が正または0の場合は⊕を，負の場合は⊖をマークすること。

(1) △ABCの面積は72であり，辺AB，BC，CAの比が7：6：5である。△ABCの内心をI，直線AIと辺BCの交点をDとするとき，△CADの面積は $\boxed{\text{アイ}}$ ，△IABの面積は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) 関数 $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 25$ が単調減少する区間を $a \leqq x \leqq b$ と表す。a，b が整数であるとすると，a がとりうる最小の値は $\boxed{\text{オ}}$ ，b がとりうる最大の値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ であることが知られている。これを利用すると，

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = \boxed{\text{キ}}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\alpha \sin \alpha} = \boxed{\text{ク}}$$

と求められる。

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕のうち２問を選択して解答せよ。（なお３問すべてに解答した場合は，高得点の２問を合計得点に含める。）

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(表面)に，次の各問の答のみを記せ。

なお，問題文中に空欄 $\boxed{\textbf{サ}}$ ，$\boxed{\textbf{シ}}$ などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{サ}}$ ，$\boxed{\text{シ}}$ のように細字で表記している。

２つの曲線 C_1：$y = x^2 + px + q$，C_2：$y = x^2 + rx + s$ があり，直線 l が C_1 と C_2 のいずれにも接している。ただし，p，q，r，s は実数で，$p \neq r$ とする。

C_1 と l の接点の x 座標を α，C_2 と l の接点の x 座標を β とするとき，$\alpha < \beta$ であるとする。

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を t とする。t を α と β で表す式を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{\textbf{サ}}$ ～ $\boxed{\textbf{チ}}$ に適切な式を入れよ。

まず，C_1，C_2 の接線の方程式を求める。

$$C_1：y = x^2 + px + q \qquad ①$$

$$C_2：y = x^2 + rx + s \qquad ②$$

①より，C_1 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2 + p\alpha + q)$ における接線の方程式は，

$$y - (\alpha^2 + p\alpha + q) = \left(\boxed{\textbf{サ}}\right)(x - \alpha)$$

これを整理して，

$$y = \left(\boxed{\text{サ}}\right)x + \left(\boxed{\textbf{シ}}\right) \qquad ③$$

同様に②より，C_2 上の点 $(\beta,\ \beta^2 + r\beta + s)$ における接線の方程式は，

$$y - (\beta^2 + r\beta + s) = \left(\boxed{\textbf{ス}}\right)(x - \beta)$$

これを整理して，

$$y = \left(\boxed{\text{ス}}\right)x + \left(\boxed{\textbf{セ}}\right) \qquad ④$$

次に直線 l を考える。直線 l は③，④が同一の式となる場合の直線である。よって，③，④より，

$$\boxed{\text{サ}} = \boxed{\text{ス}} \qquad ⑤$$

かつ $\boxed{\text{シ}} = \boxed{\text{セ}}$ ⑥

⑤，⑥を整理すると，

$p - r = \boxed{\text{ソ}}$ ⑦

$q - s = \boxed{\text{タ}}$ ⑧

C_1 と C_2 の交点の x 座標 t は，①，②より，

$$t^2 + pt + q = t^2 + rt + s$$

の解で，$p \neq r$ だから，

$$t = \frac{s - q}{p - r} \quad ⑨$$

⑨に⑦，⑧を代入し，

$t = \boxed{\text{チ}}$ ⑩

(2) C_1 と C_2 と l で囲まれた部分の面積 S を α と β で表す式を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{\text{ツ}}$ ～ $\boxed{\text{ト}}$ に適切な式を入れよ。

$$S = \int_{\alpha}^{t} \left| (x^2 + px + q) - \left\{ \left(\boxed{\text{サ}} \right) x + \left(\boxed{\text{シ}} \right) \right\} \right| dx$$

$$+ \int_{t}^{\beta} \left| (x^2 + rx + s) - \left\{ \left(\boxed{\text{ス}} \right) x + \left(\boxed{\text{セ}} \right) \right\} \right| dx$$

$$= \int_{\alpha}^{t} \left(\boxed{\text{ツ}} \right)^2 dx + \int_{t}^{\beta} \left(\boxed{\text{テ}} \right)^2 dx$$

⑩の t の値を代入し，整理すると，

$S = \boxed{\text{ト}}$

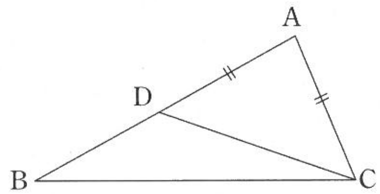
〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は,高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に,(1)〜(6)については答のみを,(7)については証明を記せ。

△ABC に関する次の定理1と定理2を証明したい。

定理1　AB ＞ AC と ∠C ＞ ∠B は,たがいに同値である

定理2　AB ＋ AC ＞ BC



[証明1－1]

定理1のうち,「AB ＞ AC ならば ∠C ＞ ∠B」を証明する。

半直線 AB 上に,AD ＝ AC となるように点 D をとれば,AB ＞ AD であるから,D は線分 AB 上に位置する。したがって,

∠ACB ＞ $\boxed{\text{ナ}}$ ①

AD ＝ AC であるから

$\boxed{\text{ニ}}$ ②

△DBC の外角 ∠ADC ＝ ∠B ＋ $\boxed{\text{ヌ}}$ であるから,

∠ADC ＞ ∠B ③

①,②,③から,∠C ＝ ∠ACB ＞ ∠ACD ＞ ∠B

[証明１－２]

次に，「AB ＞ AC ならば ∠C ＞ ∠B」の逆である

$\boxed{\text{ネ}}$ ④

を背理法を用いて証明する。

もし，∠C ＞ ∠B であるにもかかわらず，AB ＜ AC であるならば，証明１－１により∠C ＜ ∠B であり，また，もし $\boxed{\text{ノ}}$ であるならば，明らかに∠C ＝ ∠B である。いずれも ∠C ＞ ∠B であることに矛盾する。したがって，④が成立し，証明１－１の結果と合わせて，定理１が証明された。

[証明２]

定理２を証明する。

線分 BA の延長上に，AE ＝ AC となる点 E をとると，

$$AB + AC = BA + AE = \boxed{\text{ハ}} \quad ⑤$$

AE ＝ AC であるから，∠ACE ＝ ∠AEC であり，また明らかに，

∠BCE ＞ ∠ACE ＝ ∠BEC である。

ヒ

(1) 空欄 $\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまる適切な角を解答欄に記せ。

(2) 空欄 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる適切な角に関する等式を解答欄に記せ。

(3) 空欄 $\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまる適切な角を解答欄に記せ。

(4) 空欄 $\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまる適切な命題を解答欄に記せ。

(5) 空欄 $\boxed{\text{ノ}}$ に当てはまる適切な式を解答欄に記せ。

(6) 空欄 $\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまる適切な辺を解答欄に記せ。

(7) 空欄 $\boxed{\text{ヒ}}$ に当てはまる，[証明２]の証明の残りの部分を解答欄に記せ。

〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は,高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅴ〕 所定の解答欄(裏面)に,(1),(2)については答のみを,(3)については解答経過と答をともに記せ。

1からN(Nは1より大きい整数)までのすべての整数が書かれたルーレットがあり,どの数字も同じ確率$\dfrac{1}{N}$で出るものとする。このルーレットを2つ同時に回したときに出た数字の差の絶対値の平均的な値をE_Nとする。このE_Nは,差の絶対値をi,差の絶対値がiとなる確率をp_iと表すと,

$$E_N=\sum_{i=0}^{N-1} i\cdot p_i$$

で求められるとする。たとえば$N=3$のときは,次の表から,$E_3=\dfrac{8}{9}$と求められる。

	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

(1) E_4を求めよ。

(2) ルーレットの数字の最大値がNのルーレットを2つ同時に回して出た数字の差の絶対値が1となる組み合わせは何通りあるか,Nを用いた式で表せ。

(3) E_NをNを用いた式で表せ。

なお,$\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$である。

(以上問題終)