も

数　学　問　題

はじめに，これを読みなさい。

1. この問題用紙は 9 ページある。**ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含まない。** 白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は，すべて解答用紙の所定欄にマークするか，または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅴ〕まで 5 問ある。〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕は必ず解答すること。〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕はいずれか 2 問を選択して解答すること。
10. **解答用紙はすべて回収する。** 持ち帰らず，必ず提出すること。ただし，この問題用紙は，必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は 70 分である。
12. マーク記入例

良い例	悪　い　例
	

〔Ⅰ〕 (1)～(5)において，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒの値の大小関係を調べ，最大のものと最小のものを，それぞれ所定の解答欄(表面)にマークせよ。なお，i は虚数単位とする。

(1) Ⓐ $\sqrt[3]{3}$　　Ⓑ $\sqrt[5]{27}$　　Ⓒ $\sqrt[7]{9}$

(2) $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(-2,\ 3)$，$\vec{c}=(2,\ -1)$である。

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　Ⓑ $\vec{b}\cdot\vec{c}$　　Ⓒ $\vec{c}\cdot\vec{a}$

(3) Ⓐ $\left(\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)^2$　　Ⓑ $\left(\dfrac{1}{2}-i\right)\left(\dfrac{1}{2}+i\right)$　　Ⓒ $\dfrac{i-1}{i}-i$

(4) Ⓐ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$　　Ⓑ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$　　Ⓒ $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x+1}$

(5) $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に3移動し，さらに直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$y=a\log_b x+c$ に一致する。

Ⓐ a　　Ⓑ b　　Ⓒ c

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に，解答をマークせよ。

なお，問題文中の $\boxed{\text{アイ}}$ などの**ア**，**イ**，**ウ**，… の部分には数字(0～9)が入る。また，$\boxed{\text{アイ}}$ などは答が2ケタであることを，$\boxed{\text{オ}}$ などは答が1ケタであることを表している。

(1) 正の整数からなる集合 A，B，C，D について，

$$A=\{x\,|\,x \text{ は 1 以上 90 以下の整数}\}$$
$$B=\{x\,|\,x \text{ は 2 の倍数}\}$$
$$C=\{x\,|\,x \text{ は 5 の倍数}\}$$
$$D=\{x\,|\,x \text{ は 7 の倍数}\}$$

のとき，$A\cap(\overline{B\cup C}\cap D)$ に含まれる最大の整数は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，$A\cap(\overline{B\cap C}\cup D)$ に含まれる要素の数は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) 循環小数を次のように表す。

$$0.333\cdots=0.\dot{3} \qquad 0.121212\cdots=0.\dot{1}\dot{2}$$

0以上9以下の整数 a，b について，

$$0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{9}=1$$
$$0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{0}\dot{9}$$

であるとき，$a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}+2\right)^7$ を微分した $f'(x)$ の x^3 の係数は $\boxed{\text{キク}}$ であり，積分した $\int f(x)\,dx$ の x^3 の係数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。（なお3問すべてに解答した場合は，高得点の2問を合計得点に含める。）

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(表面)に，次の各問の答のみを記せ。

なお，問題文中に空欄 $\boxed{\text{サ}}$ ， $\boxed{\text{シ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は， $\boxed{\text{サ}}$ ， $\boxed{\text{シ}}$ のように細字で表記している。

次のように定義される数列について，下の問に答えなさい。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad ①$$

(1) この数列の第7項の値を記せ。

(2) 一般項を求める過程を記した次の文章の空欄 $\boxed{\text{サ}}$ ， $\boxed{\text{シ}}$ には適切な式を，空欄 $\boxed{\text{ス}}$ ～ $\boxed{\text{チ}}$ には適切な値を入れよ。なお，答が分数となる場合は，分母を有理化すること。

方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を α ， $\beta\,(\alpha \leqq \beta)$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha + \beta = 1,\quad \alpha\beta = -1 \qquad ②$$

①，②から，

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \qquad ③$$

が成り立つ。③を変形すると，次の2つの式が得られる。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \qquad ④$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \qquad ⑤$$

④から，数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は，初項 $1 - \alpha$ ，公比 β の等比数列であることがわかる。よって，この数列の一般項は， α ， β ， n を用いて次のように表すことができる。

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \boxed{\text{サ}} \qquad ⑥$$

⑤から，数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は，初項 $1 - \beta$ ，公比 α の等比数列であることがわかる。よって，この数列の一般項は， α ， β ， n を用いて次のように表す

ことができる。

$$a_{n+1} - \beta a_n = \boxed{\text{シ}} \qquad ⑦$$

⑥，⑦の辺々を引くと，

$$(\beta - \alpha)a_n = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \qquad ⑧$$

ところで，α，$\beta\,(\alpha \leqq \beta)$は，定義により方程式$x^2 - x - 1 = 0$の解だから，この方程式を解くことにより，値を次のように具体的に求めることができる。

$$\alpha = \boxed{\text{ス}} \qquad ⑨$$

$$\beta = \boxed{\text{セ}} \qquad ⑩$$

$\alpha \neq \beta$だから，⑧より，

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}\right) \qquad ⑪$$

$\dfrac{1}{\beta - \alpha}$を⑨，⑩から求めると，

$$a_n = \boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}\right) \qquad ⑫$$

$\alpha + \beta = 1$であることから，求める一般項は，

$$a_n = \boxed{\text{ソ}}\left\{\left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{2}\right)^n - \left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{2}\right)^n\right\}$$

となる。

〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。（なお3問すべてに解答した場合は，高得点の2問を合計得点に含める。）

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に，(1)〜(5)については答のみを，(6)については解答経過と答をともに記せ。

関数$f(x)$が任意のxに対して，$f(-x)=f(x)$であるとき，関数$f(x)$は偶関数であると言い，$f(-x)=-f(x)$であるとき，奇関数であると言う。偶関数の例として，$f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$があり，奇関数の例として，$f(x)=x$，$f(x)=\sin x$がある。

偶関数と奇関数に関して次の性質が成り立つ。

- 偶関数と偶関数の積(商)は偶関数。なぜなら，$f(x)$と$g(x)$がともに偶関数であるとき，$f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)$だからである。
- 奇関数と奇関数の積(商)は $\boxed{\text{ツ}}$ 。
- 偶関数と奇関数の積(商)は $\boxed{\text{テ}}$ 。
- 偶関数と偶関数の和(差)は偶関数。
- 奇関数と奇関数の和(差)は $\boxed{\text{ト}}$ 。
- 偶関数と奇関数の和(差)は $\boxed{\text{ナ}}$ 。

(1) 空欄 $\boxed{\text{ツ}}$ 〜 $\boxed{\text{ナ}}$ のそれぞれについて，偶関数のときはEを，奇関数のときはOを，どちらでもないときはNを，解答欄に記せ。

(2) 偶関数の具体例を2つ解答欄に記せ。ただし，上の例に挙げたものを除く。

(3) 奇関数の具体例を2つ解答欄に記せ。ただし，上の例に挙げたものを除く。

(4) 任意の関数$h(x)$は，

$$h(x)=\frac{1}{2}\{h(x)+h(-x)\}+\frac{1}{2}\boxed{\text{ニ}}$$

と表すことができる。明らかに，$\frac{1}{2}\{h(x)+h(-x)\}$は偶関数であり，$\frac{1}{2}\boxed{\text{ニ}}$ は奇関数であるから，任意の関数は偶関数と奇関数の和で表すことができる。空欄 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまる適切な式を解答欄に記せ。

(5) 関数 $\dfrac{1}{x+1}$（ただし $x \neq \pm 1$）を偶関数と奇関数の和で表し，解答欄に記せ。

(6) $f(x)$ が偶関数であるとき，定積分

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (a > 0)$$

であり，$f(x)$ が奇関数であるとき，定積分

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad (a > 0)$$

である。この性質を使って，次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-2}^{2} 3x^2(\sin x + \cos x)^2\,dx$$

〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は，高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅴ〕 所定の解答欄(裏面)に，(1)については答のみを，(2)，(3)については解答経過と答をともに記せ。

m を実数とし，円 $x^2+y^2+2mx-2my+m^2=0$ と直線 $y=x-m+7$ が異なる2点で交わるとき，この2つの交点をP，Qとする。また，交点P，Qの x 座標を α，β とする。

(1) 線分PQの長さは，$|\alpha-\beta|$ の定数倍になる。その定数を記せ。

(2) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を m を用いた式で表せ。

(3) 線分PQの長さの最大値と，その時の m の値を求めよ。

(以上問題終)