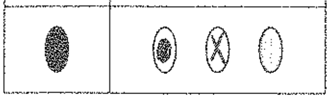
て

数　学　問　題

はじめに，これを読みなさい。

1. この問題用紙は７ページある。**ただし，ページ番号のない白紙はページ数に含まない。**白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか，受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい，解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は，すべて解答用紙の所定欄にマークするか，または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は，鉛筆またはシャープペンシル（いずれもHB・黒）で記入のこと。
7. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅳ〕まで４問ある。〔Ⅰ〕は必ず解答すること。〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕，〔Ⅳ〕はいずれか２問を選択して解答すること。
10. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず，必ず提出すること。ただし，この問題用紙は，必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は70分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例



〔Ⅰ〕 (1)~(10)において，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒの値の大小関係を調べ，最小のものと最大のものを，それぞれ解答用紙の所定欄にマークせよ。

(1) Ⓐ ${}_{100}\mathrm{C}_{50}$　　Ⓑ ${}_{101}\mathrm{C}_{51}$　　Ⓒ ${}_{102}\mathrm{C}_{52}$

(2) Ⓐ $\tan 60^\circ$　　Ⓑ $3^{0.6}$　　Ⓒ $\log_2 5$

(3) △ABC において，∠B ＝ ∠C ＝ 30° のとき，

Ⓐ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　Ⓑ $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　Ⓒ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

(4) 中心を O とする円に内接する四角形 ABCD について，∠A は 130° である。

Ⓐ $\sin A$

Ⓑ $\cos C$

Ⓒ $\sin\angle\mathrm{BOD}$（ただし，$\angle\mathrm{BOD} < 180^\circ$）

(5) $z = \dfrac{3+2i}{2-3i}$（i は虚数単位）とおいたとき，

Ⓐ z の虚部　　Ⓑ z の実部　　Ⓒ z^2 の実部

(6) 初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列の

Ⓐ 初項から第 99 項までの和

Ⓑ 初項から第 100 項までの和

Ⓒ 初項から第 101 項までの和

(7) 直線 $y = ax + b$ は半径 c の円 $x^2 + y^2 = c^2$ と点（3，4）で接している。

Ⓐ a　　Ⓑ b　　Ⓒ c

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

(8) a, b, c は 0 でない実数とする。関数 $y = ax^2 + bx + c$ の点 $(-1,\ a - b + c)$ における接線は傾きが -1 で y 切片が -1，点 $(1,\ a + b + c)$ における接線は傾きが 7 で y 切片が -1 である。

Ⓐ a　　Ⓑ b　　Ⓒ c

(9) 2 つの正の整数 m, n に関する次の 4 つの条件

・m または n は偶数

・m または n は奇数

・m, n はともに偶数

・m, n はともに奇数

のうち，

Ⓐ 「$m + n$ は偶数」であるための十分条件にあたる条件の個数

Ⓑ 「$m + n$ は奇数」であるための十分条件にあたる条件の個数

Ⓒ 「mn は偶数」であるための必要条件にあたる条件の個数

(10) サイコロを繰り返し振り，特定の目が出た時点か，1000 回振った時点で終了し，最後に出た目で賞金額が決まるゲームを行う。

Ⓐ 1 の目が出たら 100 円をもらいゲームを終了し，他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。

Ⓑ 1 の目が出たら 300 円をもらいゲームを終了し，2 の目が出たら何ももらえずゲームを終了し，他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。

Ⓒ 1 の目が出たら 500 円をもらいゲームを終了し，2 か 3 か 4 の目が出たら何ももらえずゲームを終了し，他の目が出たら何ももらえないが再度サイコロを振るルールの場合の賞金の期待値。

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔II〕，〔III〕，〔IV〕のうち2問を選択して解答せよ。（なお3問すべてに解答した場合は，高得点の2問を合計得点に含める。）

〔II〕 所定の解答欄（表面）に，次の各問の答のみを記せ。

正の整数 n に対して $\varphi(n)$ を，n 以下の正の整数で n と互いに素（n との最大公約数が1）である数 x の個数とする。たとえば，

$$\varphi(9)=6$$

である。なぜなら，$x=8,\ 7,\ 5,\ 4,\ 2,\ 1$ だからである。

(1) $\varphi(15)$ を求めよ。

(2) p を素数とするとき，$\varphi(p)$ を p で表わせ。

(3) $n \leqq 15$ のとき，$\varphi(n)=4$ となる n をすべて求めよ。

(4) $n \leqq 1000$ のとき，$\varphi(n)$ が最大となる n を求めよ。

(5) p を素数，k を正の整数とすると，$\varphi(p^k)=p^k-\boxed{}$ である。なぜなら，1から p^k までの数の中で，p^k と互いに素でないものは p で割り切れるから，それらは $1\cdot p,\ 2\cdot p,\ 3\cdot p,\ \cdots,\ \boxed{}\cdot p$ と表わすことができ，全部で $\boxed{}$ 個となるからである。

上の3つの $\boxed{}$ には同一の式が入る。その式を p と k を用いて表わせ。

（このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。）

〔II〕，〔III〕，〔IV〕のうち２問を選択して解答せよ。（なお３問すべてに解答した場合は，高得点の２問を合計得点に含める。）

〔III〕 所定の解答欄（裏面）に，(1)，(2)については答のみを，(3)については答と解答経過をともに記せ。

曲線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ で囲まれた面積 S の図形がある。原点を通る直線 $y = ax\ (a > 0)$ はこの図形を２つに分割し，かつ分割してできた２つの図形の面積はともに $\frac{S}{2}$ で等しい。

(1) 曲線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = -x + 2$ の交点の座標を求めよ。

(2) 面積 S を求めよ。

(3) a の値を求めよ。

〔IV〕 所定の解答欄（裏面）に，(1)，(2)については答のみを，(3)については答と解答経過をともに記せ。

一辺の長さが a の正四面体 ABCD がある。

(1) A から△BCD を含む平面に下ろした垂線を AH とするとき，AH の長さを求めよ。

(2) 正四面体 ABCD の体積 V を求めよ。

(3) 正四面体 ABCD に内接する球の半径を r とするとき，r を求めよ。

（以上問題終）